

# Points rationnels sur les quotients d'Atkin-Lehner de courbes de Shimura de discriminant $pq$

Florence Gillibert

16 décembre 2010

## Abstract

Let  $p$  and  $q$  be two distinct prime numbers, and  $X^{pq}/w_q$  be the quotient of the Shimura curve of discriminant  $pq$  by the Atkin-Lehner involution  $w_q$ . We describe a way to verify in wide generality a criterion of Parent and Yafaev to prove that if  $p$  and  $q$  satisfy some explicite congruence conditions, known as the conditions of the non ramified case of Ogg, and if  $p$  is large enough compared to  $q$ , then the quotient  $X^{pq}/w_q$  has no rational point, except possibly special points.

## Résumé

Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts et  $X^{pq}/w_q$  le quotient de la courbe de Shimura de discriminant  $pq$  par l'involution d'Atkin-Lehner  $w_q$ . Nous décrivons un moyen permettant de vérifier un critère de Parent et Yafaev en grande généralité pour prouver que si  $p$  et  $q$  satisfont des conditions de congruence explicites, connues comme les conditions du cas non ramifié de Ogg, et si  $p$  est assez grand par rapport à  $q$ , alors le quotient  $X^{pq}/w_q$  n'a pas de point rationnel non spécial.

## 1 Introduction

La recherche de quotients d'Atkin-Lehner de courbes de Shimura sans point rationnel non spécial a été l'objet de plusieurs travaux notamment de Clark [Clarkthesis], Rotger [Rotger], Rotger, Skorobogatof et Yafaev [RSY], Bruin, Flynn, González et Rotger [BFGR], ainsi que de Parent et Yafaev [ParentYafaev]. Pour des équations de ces courbes, on peut aussi consulter les travaux (à paraître) de Molina [Molina]. Ce problème est lié à une conjecture (attribuée à Coleman) sur les anneaux d'endomorphismes potentiels de variétés abéliennes de type  $GL_2$  (cf. [BFGR]). On dit qu'une variété abélienne  $A/\mathbb{Q}$  est de type  $GL_2$  si son algèbre d'endomorphisme  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q}$  est un corps de nombre de degré  $\dim(A)$ . La conjecture est énoncée ainsi par Clark et Mazur : pour toute dimension

$g$  fixée, il y a un nombre fini de classes d'isomorphismes d'anneaux d'endomorphismes sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  de variétés abéliennes  $A/\mathbb{Q}$  de type  $\mathrm{GL}_2$  de dimension  $g$ . Dans le cas  $g = 1$ , ces variétés abéliennes sont les courbes elliptiques, et la liste finie des anneaux d'endomorphismes possibles est connue. L'étude des courbes de Shimura permet d'aborder cette conjecture dans le cas de la dimension  $g = 2$ . En effet, étant donné une algèbre de quaternion  $B_D$  de discriminant  $D$ , et un entier sans facteur carré  $m$ , toute surface abélienne  $A/\mathbb{Q}$ , telle que  $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$  et  $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(A)$  soit un ordre maximal de  $B_D$ , est associée à un point rationnel non spécial sur le quotient  $X^D/w_m$  de la courbe de Shimura de discriminant  $D$  par l'involution d'Atkin-Lehner  $w_m$  (cf. [BFGR, thm 4.5]). L'absence de point rationnel non spécial sur  $X^D/w_m$  est en fait un problème plus fort que l'absence de telles surfaces abéliennes  $A/\mathbb{Q}$ ; en effet de tels points rationnels peuvent correspondre à des surfaces abéliennes à multiplication quaternionique définies sur une extension de  $\mathbb{Q}$  et admettant  $\mathbb{Q}$  comme corps de module.

Dans cet article, nous nous restreignons au cas où le discriminant  $D$  de la courbe de Shimura est le produit de deux nombres premiers  $p$  et  $q$ . L'existence de points rationnels sur  $X^{pq}/w_q$  peut se produire dans deux cas décrits par Ogg (cf. proposition 2.1) : le « cas ramifié » et le « cas non ramifié ». Nous nous plaçons dans le cas non ramifié de Ogg. Remarquons que dans ce cas l'absence de surfaces abéliennes à multiplication quaternionique découle d'un résultat de Rotger : [Rotger, thm 1.4]. Dans leur article [ParentYafaev], Parent et Yafaev donnent un critère, pour l'absence de point rationnel non spécial sur un quotient d'Atkin-Lehner  $X^{pq}/w_q$  de courbe de Shimura dont le discriminant est le produit de deux nombres premiers. Nous rappelons leur énoncé dans la proposition 4.3. Une application immédiate de ce critère leur permet de déterminer un exemple de famille infinie de quotients d'Atkin-Lehner de courbes de Shimura sans point spécial, de la forme  $X^{251p}/w_{251}$ , mais la vérification de ce critère n'était jusqu'alors possible que dans de tels cas particuliers. Dans cet article nous appliquons ce critère à des courbes  $X^{pq}/w_q$  beaucoup plus générales. En fait pour presque toutes à  $q$  fixé : pour tout nombre premier  $q > 245$ , et tout nombre premier  $p$  supérieur à une borne (non effective) dépendant de  $q$ , si la condition du cas non ramifié de Ogg est satisfaite (cf. proposition 2.1 ci-dessous), alors nous pouvons appliquer le critère.

**Théorème 1.1.** *Soit  $q > 245$  un nombre premier avec  $q \equiv 3 \pmod{4}$ . Il existe une borne  $B_q$  dépendant de  $q$  telle que si  $p$  est un nombre premier vérifiant  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$  et  $p \geq B_q$ , alors la courbe  $X^{pq}/w_q$  est sans point rationnel non spécial.*

Résumons ici la preuve (on renvoie au texte pour les définitions et énoncés précis) : Le critère de Parent et Yafaev proposition 4.3 ne peut être appliqué qu'à des couples de nombres premiers  $(p, q)$  satisfaisant les conditions du cas non ramifié de Ogg ( (2) proposition 2.1) et la condition supplémentaire  $p \equiv -1 \pmod{3}$ . Nous généralisons ce théorème dans la proposition 4.4 en supprimant cette dernière condition. Celle-ci apparaît dans un lemme de Parent et Yafaev sur le groupe des composantes de  $\mathrm{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$ . On considère  $(\widetilde{X^{pq}/w_q})_{\mathbb{F}_p}$  la fibre en  $p$  du modèle régulier de  $X^{pq}/w_q$ , obtenu par éclatement

aux points singuliers du modèle décrit par Cherednik et Drinfeld. Supposons que  $p$  et  $q$  satisfont les conditions du cas non ramifié de Ogg, et que  $q$  est « assez grand ». Soit  $\mathcal{J}$  la composante exceptionnelle de  $(\widetilde{X^{pq}/w_q})_{\mathbb{F}_p}$  apparaissant après éclatement de l'unique point singulier d'épaisseur 2, et  $J \neq \mathcal{J}$  une autre composante irréductible de  $(\widetilde{X^{pq}/w_q})_{\mathbb{F}_p}$ . Parent et Yafaev prouvent que si  $p \equiv -1 \pmod{3}$ , pour  $p \gg q$ , on a  $(p+1)(J - \mathcal{J}) \neq 0$  dans le groupe des composantes de  $\text{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$  (cf. [ParentYafaev, lemma 3.1.3]). Dans le troisième paragraphe nous généralisons ce lemme en montrant que le résultat reste valable si  $p \equiv 1 \pmod{3}$  (cf. lemme 3.2).

Dans le quatrième paragraphe, nous appliquons le critère de Parent-Yafaev (théorème 4.4) pour prouver le théorème 1.1. Pour cela il suffit de construire un cycle sur le graphe  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq}/w_q)$  constitué de vecteurs de Gross contenant l'arête exceptionnelle de longueur 2 avec une multiplicité première à  $p$ . Le chemin que nous construisons utilise également le vecteur d'Eisenstein qui appartient à l'espace engendré par les vecteurs de Gross. Comme les vecteurs de Gross sont invariants par l'action de  $w_q$ , nous travaillons sur  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$ . Nous utilisons la description du graphe de  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  donnée par Ribet. Le groupe des chemins  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  est isomorphe au groupe des diviseurs sur les  $p$ -isogénies entre courbes elliptiques supersingulières en caractéristique  $q$  à isomorphisme près. D'autre part le groupe des chemins  $\mathcal{P}_S$  sur le graphe  $\mathcal{G}(X_0(q)_{\mathbb{F}_q})$  est isomorphe au groupe des diviseurs sur les courbes elliptiques supersingulières en caractéristique  $q$  à isomorphisme près. Le groupe des cycles sur  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  est l'intersection des noyaux de deux morphismes naturels  $s_*$  et  $t_*$  de  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{P}_S$ .

Pour éviter la confusion entre les vecteurs de Gross sur le graphe  $\mathcal{G}(X_0(q)_{\mathbb{F}_q})$  et les vecteurs de Gross sur le graphe  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$ , nous les désignons respectivement par vecteurs de Gross-modulaire (cf. définition 2.4) et vecteurs de Gross-Shimura (cf. définition 2.11). De même, le vecteur d'Eisenstein sur  $\mathcal{G}(X_0(q)_{\mathbb{F}_q})$  et le vecteur d'Eisenstein sur  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  sont appelés respectivement vecteur d'Eisenstein-modulaire et vecteur d'Eisenstein-Shimura.

Nous prouvons (sous certaines condition sur l'ordre  $O_D$  de discriminant  $D$ ) que l'image d'un vecteur de Gross-Shimura  $\gamma_D \in \mathcal{L}$  par l'application  $s_*$  (ou  $t_*$ ) est le vecteur de Gross-modulaire  $\Gamma_D \in \mathcal{P}_S$  correspondant au même discriminant. Construire un cycle  $C$  constitué de vecteurs de Gross-Shimura, revient à construire un chemin nul en vecteurs de Gross-modulaire. Pour trouver un cycle contenant les arêtes exceptionnelles avec une multiplicité  $\lambda$  première à  $p$ , nous construisons un cycle de la forme  $C_0 = C + \lambda a_E$  où  $C$  est un chemin en vecteurs de Gross ne contenant pas l'arête exceptionnelle et  $a_E$  est le vecteur d'Eisenstein-Shimura. Pour cela, nous nous ramenons à construire une combinaison linéaire de vecteurs de Gross-modulaires égale au vecteur d'Eisenstein-modulaire en utilisant uniquement des vecteurs associés à des « bons » ordres.

## 2 Vecteurs de Gross

Pour toute la suite,  $p$  et  $q$  sont deux nombres premiers distincts, tous deux  $\geq 5$ . Dans ce paragraphe, nous allons rappeler la notion de vecteurs de Gross sur le graphe dual de la fibre en  $q$  de la courbe modulaire de niveau  $q$ , et sur le graphe dual de la fibre en  $p$  d'une courbe de Shimura de discriminant  $pq$ . Nous invitons le lecteur à se référer à [Clarkthesis] et [Ribet] pour une introduction aux courbes de Shimura, à [Gross] pour la définition des vecteurs de Gross sur les courbes modulaires de niveau premier, et à [ParentYafaev, §4] pour le cas des vecteurs de Gross sur les courbes de Shimura de discriminant  $pq$ .

Dans les paragraphes suivants, on considérera l'existence éventuelle de points rationnels du quotient de la courbe de Shimura  $X^{pq}$  par l'involution d'Atkin-Lehner  $w_q$ . Cette existence de points rationnels ne peut se produire que dans les deux cas décrits par Ogg dans la proposition suivante.

**Proposition 2.1.** *Si  $X^{pq}/w_q(\mathbb{Q})$  est non vide, alors  $(\frac{p}{q}) = -1$ , et une des deux conditions suivante est satisfaite*

- (1)  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ; (cas ramifié)
- (2)  $p \equiv 1 \pmod{4}$  et  $q \equiv 3 \pmod{4}$  (cas non ramifié).

*Démonstration.* Consulter [RSY, thm 3.1]. □

Nous nous placerons pour ce travail dans le cas non ramifié.

### 2.1 Vecteurs de Gross sur le graphe modulaire

D'après le travail de Deligne et Rapoport (cf. [DR, théorème 6.9 et exemple 6.16]) la fibre en  $q$  de la courbe modulaire  $X_0(q)$  est constituée de deux composantes irréductibles  $s_1$  et  $s_2$  isomorphes à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$  se coupant transversalement. Il découle de cette description que le graphe dual de la fibre en  $q$  de la courbe modulaire  $X_0(q)$ , noté  $\mathcal{G}((X_0(q))_{\mathbb{F}_q})$ , est constitué de deux sommets  $s_1$  et  $s_2$  et d'arêtes entre  $s_1$  et  $s_2$ . Ces arêtes correspondent à l'ensemble  $S$  des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières sur  $\overline{\mathbb{F}}_q$ . On note  $E_{j_1}, \dots, E_{j_{g+1}}$  un système de représentants de  $S$ , où les  $j_k$  parcourent le sous-ensemble de  $\mathbb{F}_{q^2}$  constitué par les  $j$ -invariants supersinguliers, et  $g$  est le genre de  $X_0(q)$ . Soit  $B_{q\infty}$  l'algèbre de quaternions sur  $\mathbb{Q}$  ramifiée en  $q$  et l'infini. À la classe d'isomorphismes de la courbe elliptique  $E_{j_k}$ , on associe l'ordre maximal  $\Omega_k = \text{End}(E_{j_k}) \subseteq B_{q\infty}$ .

Le cardinal de  $(\Omega_k^*/\{\pm 1\})$  est appelé la longueur de l'arête de  $\mathcal{G}((X_0(q))_{\mathbb{F}_q})$  correspondant à  $E_{j_k}$ . D'après [Silv2, theorem 10.1 p. 103], si  $j_k \neq 0, 1728$  ce cardinal est égal à 1. Il y a donc au plus deux arêtes de longueur  $> 1$ .

On désigne par  $\mathcal{P}_S$  l'ensemble des chemins sur le graphe  $\mathcal{G}((X_0(q))_{\mathbb{F}_q})$ , c'est le  $\mathbb{Z}$ -module des diviseurs sur  $S$ . On définit le degré d'un chemin par :  $\text{degré}(\sum_{k=1}^{g+1} \lambda_{j_k} E_{j_k}) = \sum_{k=1}^{g+1} \lambda_{j_k}$ . On note  $\mathcal{P}_S^0$  le  $\mathbb{Z}$ -module des diviseurs de degré 0 sur  $S$ . La  $\mathbb{Z}$ -algèbre  $\mathbb{T}_{\Gamma_0(q)}$  engendrée par les opérateurs de Hecke  $T_l$ , pour  $l \neq q$  premier, agit sur les groupes  $\mathcal{P}_S$  et  $\mathcal{P}_S^0$ .

par l'action  $T_l(E) = \sum_{C_l \subset E} E/C_l$ , où  $E \in S$  et  $C_l$  parcourt l'ensemble des sous-groupes d'ordre  $l$  de  $E$ .

**Définition 2.2.** L'accouplement de monodromie (Cf. [SGA7-I, Exposé 9 §9]) est la forme bilinéaire non dégénérée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathcal{P}_S$  définie par :

$$\langle E_{j_k}, E_{j_l} \rangle = \delta_{j_k, j_l} \text{card}(\Omega_k^*/\{\pm 1\}),$$

où  $\delta_{j_k, j_l}$  est le symbole de Kronecker. Ainsi  $E_{j_1}, \dots, E_{j_{g+1}}$  est une base orthogonale pour cet accouplement. Chaque  $E_{j_k}$  est de norme 1 pour cet accouplement, sauf si  $j_k = 0$  ou 1728.

**Définition 2.3.** Le vecteur d'Eisenstein (ou vecteur d'Eisenstein-modulaire)  $A_E \in \frac{1}{6}\mathcal{P}_S$  est :

$$A_E = \sum_{k=1}^{g+1} \frac{1}{\text{card}(\Omega_k^*/\{\pm 1\})} E_{j_k}.$$

Le vecteur d'Eisenstein  $A_E$  forme une base de  $(\mathcal{P}_S^0)^\perp$ , l'espace orthogonal à  $\mathcal{P}_S^0$  pour cet accouplement. Il est choisi de telle sorte que, pour  $v \in \mathcal{P}_S$ , le degré de  $v$  est  $\langle v, A_E \rangle$ .

**Définition 2.4.** Soit  $O_D$  l'ordre quadratique imaginaire de discriminant  $D$ . On lui associe un vecteur  $\Gamma_D \in \frac{1}{12}\mathcal{P}_S$ , appelé *vecteur de Gross sur le graphe modulaire* (ou vecteur de Gross-modulaire) :

$$\Gamma_D = \frac{1}{2u(D)} \sum_{k=1}^{g+1} H_k(D) E_{j_k},$$

où  $H_k(D)$  est le nombre de plongements optimaux de  $O_D$  dans  $\Omega_k$  modulo conjugaison par  $\Omega_k^*$  (cf. [Gross, §1, p 122]), et  $u(D) = \text{card}(O_D^*/\{\pm 1\})$ . On a  $u(D) = 1$ , sauf pour  $D = -3$  ou  $-4$ . De plus on a  $u(-3) = 3$ ,  $u(-4) = 2$ .

Par la formule des traces d'Eichler, lorsque  $q$  est scindé dans  $O_D$  ou lorsque  $q$  divise le conducteur de  $O_D$ , il n'existe pas de plongement de  $O_D$  dans  $B_{q^\infty}$  (voir [Gross, §1, p 122]). Le vecteur  $\Gamma_D$  est non nul si  $q$  est inerte ou ramifié dans  $O_D$  et  $q^2$  ne divise pas  $D$ . La proposition suivante donne une interprétation des vecteurs de Gross en terme de réduction modulo  $q$  des courbes elliptiques définies sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  ayant multiplication complexe par  $O_D$ . Nous nous plaçons dans le cas où  $q$  est inerte dans  $O_D$ , car nous ne manipulerons dans la suite que de tels vecteurs de Gross.

**Proposition 2.5.** Soit  $O_D$  un ordre quadratique imaginaire de discriminant  $D$  et de nombre de classe  $h(D)$ , tel que  $q$  soit inerte dans  $O_D$ . Fixons  $\mathcal{Q}$  une place de  $\overline{\mathbb{Q}}$  au dessus de  $q$ . Le vecteur  $u(D)\Gamma_D$  est constitué de la somme des réductions (non forcément distinctes) modulo  $\mathcal{Q}$  des  $h(D)$  courbes elliptiques sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  ayant multiplication complexe par  $O_D$ .

*Démonstration.* Par la formule des traces d'Eichler (cf. [Vigneras, thm 5.11, p 92]), le nombre de plongements optimaux de  $O_D$  dans les ordres maximaux de  $B_{q^\infty}$  est

$$\sum_{i=1}^{g+1} H_i(D) = \left(1 - \left(\frac{D}{q}\right)\right) h(D) = 2h(D).$$

D'autre part, d'après le théorème fondamental de la multiplication complexe, il existe  $h(D)$  courbes elliptiques  $E_1/\overline{\mathbb{Z}}, E_2/\overline{\mathbb{Z}}, \dots, E_{h(D)}/\overline{\mathbb{Z}}$  à  $\overline{\mathbb{Q}}$ -isomorphisme près ayant multiplication complexe par  $O_D$ . Pour chacune de ces courbes elliptiques, il existe deux isomorphismes conjugués  $f_1, f_2: O_D \rightarrow \text{End}(E)$ . La place  $\mathcal{Q}$  définit une inclusion de  $\overline{\mathbb{Z}}$  dans une clôture algébrique de  $O_D \otimes \mathbb{Z}_q$ . Soit  $W$  un anneau de valuation discrète complet contenant  $O_D \otimes \mathbb{Z}_q$ , de corps résiduel  $\overline{\mathbb{F}}_q$ , et tel que  $E_1, \dots, E_{h(D)}$  sont définies sur  $W$ . On note  $q'$  l'uniformisante de  $W$ . On considère l'ensemble des couples  $(E, g)$  constitués d'une courbe elliptique  $E/W$  à multiplication complexe par  $O_D$  sur  $W$ , muni d'un isomorphisme fixé  $g: O_D \rightarrow \text{End}(E)$ . On dit que les couples  $(E, g)$  et  $(E', g')$  sont équivalents s'il existe un isomorphisme  $i: (E \bmod q') \rightarrow (E' \bmod q')$  tel que  $(g'(\alpha) \bmod q') \circ i = i \circ (g(\alpha) \bmod q')$  pour tout  $\alpha \in O_D$ . D'après Gross [Gross, fin du §2 pp. 128-129], les plongements optimaux de  $O_D$  dans les ordres maximaux de  $B_{q^\infty}$  correspondent aux couples  $(E, g)$ , à équivalence près. Le plongement optimal associé à un tel couple  $(E, g)$  est obtenu par composition de  $g: O_D \rightarrow \text{End}(E)$  et de la réduction  $\text{End}(E) \rightarrow \text{End}(E \bmod q')$ . Toute courbe elliptique  $E/W$  à multiplication complexe par  $O_D$  est une tordue d'une des courbes  $E_1, \dots, E_{h(D)}$ . Donc tout couple  $(E, g)/W$  est équivalent à un des couples  $(E_l, f)/W$ . Ainsi chacun des  $2h(D)$  plongement optimaux de  $O_D$  dans les ordres maximaux de  $B_{q^\infty}$  correspond à d'un des  $2h(D)$  couples  $(E_l, f)/\overline{\mathbb{Z}}$ . Cette correspondance est bijective par égalité des cardinaux. Pour conclure il suffit de voir que :

$$2u(D)\Gamma_D = \sum_{k=1}^{g+1} \sum_{\substack{O_D \rightarrow \Omega_k \\ \text{optimal}}} E_{j_k}.$$

Donc on a

$$2u(D)\Gamma_D = \sum_{\substack{(E, g)/W \\ \text{à équiv. près}}} (E \bmod q') = 2(E_1 + \dots + E_{h(D)}) \bmod \mathcal{Q}.$$

□

**Proposition 2.6.** *Toute arête est de longueur 1 sauf dans les deux cas suivants :*

- si  $q$  est inerte dans  $O_{-4}$ , alors  $1728 \bmod q$  est un  $j$ -invariant supersingulier et l'arête associée à la courbe elliptique  $E_{1728}$  de  $j$ -invariant  $1728 \bmod q$  est de longueur 2. Plus précisément  $O_{-4} = \mathbb{Z}[\zeta_4]$  se plonge dans  $\text{End } E_{1728}$ .
- Si  $q$  est inerte dans  $O_{-3}$ , alors  $0 \bmod q$  est un  $j$ -invariant supersingulier et l'arête associée à la courbe elliptique  $E_0$  de  $j$ -invariant 0 est de longueur 3. Plus précisément  $O_{-3} = \mathbb{Z}[\zeta_6]$  se plonge dans  $\text{End } E_0$ .

*Démonstration.* Découle de [Silv1, thm 10.1 p. 103] et du fait qu'une arête de longueur 2 (respectivement de longueur 3) correspond à un ordre maximal de  $B_{q^\infty}$  dans lesquels se plonge  $O_{-4}$  (respectivement  $O_{-3}$ ).  $\square$

L'algèbre de Hecke  $\mathbb{T}_{\Gamma_0(q)}$  agit sur l'espace  $S_2(\Gamma_0(q))$  des formes modulaires paraboliques primitives  $f$  de poids 2 sur  $\Gamma_0(q)$ . On désigne par  $I_e$  l'idéal d'enroulement de  $\mathbb{T}_{\Gamma_0(q)}$ , c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs de  $\mathbb{T}_{\Gamma_0(q)}$  annihilant toutes les formes modulaires de  $S_2(\Gamma_0(q))$  telles que  $L(f, 1) \neq 0$ . Pour une forme modulaire primitive  $f$ , la formule de Gross [Gross, Cor. 11.6, p. 167] et de façon plus générale un théorème de Waldspurger [LR, p 397], relie la valeur de  $L(f, 1)$  à la norme de l'image  $\Gamma_{f,D}$  du vecteur de Gross  $\Gamma_D$  par l'idempotent primitif  $1_f \in \mathbb{T}$  associé à  $f$ . On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 2.7.** *L'espace engendré par les projections orthogonales des vecteurs de Gross de discriminant  $D$  premier à  $q$  sur  $\mathcal{P}_S \otimes \mathbb{Q}$  est  $\mathcal{P}_S[I_e] \otimes \mathbb{Q}$ .*

*Démonstration.* Consulter [Parent, prop 4,2].  $\square$

On rappelle finalement que le vecteur d'Eisenstein appartient au  $\mathbb{Q}$ -espace engendré par les vecteurs de Gross. Cela découle de la proposition 2.8 ci-dessous.

**Proposition 2.8.** *Soient  $D$  le discriminant de l'ordre maximal  $O_D$  d'un corps quadratique imaginaire, tel que  $q$  soit inerte ou ramifié dans  $O_D$  et  $l \neq q$  un nombre premier. On a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle A_E, A_E \rangle}{\langle A_E, \Gamma_{l^{2n}D} \rangle} \Gamma_{l^{2n}D} = A_E.$$

*Il en découle que  $A_E$  appartient au  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par les  $\Gamma_{l^{2n}D}$ , pour  $n \geq 1$ .*

*Démonstration.* Consulter [Parent, thm 4.3].  $\square$

On peut remarquer de la même façon que le vecteur d'Eisenstein-Shimura sur le graphe dual de la fibre en  $p$  de la courbe de Shimura  $X^{pq}$  (cf. Définition 2.9) s'exprime lui aussi comme combinaison linéaire de vecteurs de Gross.

## 2.2 Vecteurs de Gross sur le graphe de Shimura

Soit  $X^{pq}$  la courbe de Shimura de discriminant  $pq$ . Ribet donne la description de  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$ , le graphe dual de la fibre en  $p$  de cette courbe de Shimura, dans [Ribet, Propositions 4.4 et 4.7]. L'ensemble de ses sommets est constitué de deux copies  $S_1 \sqcup S_2$  de l'ensemble  $S$  des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières  $\overline{\mathbb{F}}_q$ . L'ensemble de ses arêtes est l'ensemble  $\{e_1, \dots, e_n\}$  des classes d'isomorphismes de  $p$ -isogénies entre ces courbes elliptiques. Chacune de ces isogénies  $e_i: E_{j_1} \rightarrow E_{j_2}$  s'interprète comme une arête reliant le sommet de  $S_1$  correspondant à  $E_{j_1}$  au sommet de  $S_2$  correspondant à

$E_{j_2}$ . De manière équivalente l'ensemble des arêtes du graphe s'identifie avec l'ensemble des couples  $(E, C_p)$ , où  $E$  est une courbe elliptique supersingulière à isomorphisme près sur  $\overline{\mathbb{F}}_q$ , et  $C_p$  est un sous-groupe d'ordre  $p$  de  $E$  défini à action de  $\text{End}(E)^*$  près. On munit ce graphe d'une orientation en considérant que toutes les arêtes sont orientées d'un sommet de  $S_1$  vers un sommet de  $S_2$ . À chaque arête  $e = (E, C_p)$  on associe l'ordre d'Eichler  $\text{End}(e) = \{\alpha \in \text{End}(E) : \alpha(C_p) \subseteq C_p\}$  de niveau  $p$  dans  $B_{q^\infty}$ . On définit la longueur d'une arête  $e = (E, C_p)$  comme le cardinal de  $\text{End}(e)^*/\{\pm 1\}$ . Comme pour le graphe modulaire, les arêtes ont toutes une longueur 1, sauf peut-être les quatre arêtes décrites dans le corollaire 2.15 ci-après.

Les involutions d'Atkin Lehner  $w_p$  et  $w_q$  agissent sur le graphe de la manière suivante : l'involution  $w_p$  échange chaque sommet de  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) avec le sommet de  $S_2$  (respectivement  $S_1$ ) correspondant à la même courbe elliptique à isomorphisme près, et échange l'arête correspondant à une isogénie  $(E, C_p)$  avec l'opposé de l'arête correspondant à son isogénie duale  $(E/C_p, E[p]/C_p)$ . L'involution  $w_q$  agit comme le Frobenius sur le graphe, c'est-à-dire qu'elle échange chaque sommet de  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) avec le sommet de  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) correspondant à l'image par le Frobenius en  $q$  de la courbe elliptique correspondante, et échange l'arête correspondant à l'isogénie  $(E, C_p)$  avec l'arête correspondant à l'image de cette isogénie par le Frobenius.

Comme dans le paragraphe précédent, on considère  $\mathcal{L}$  le  $\mathbb{Z}$ -module des diviseurs sur les arêtes du graphe  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$ . On appelle les éléments de  $\mathcal{L}$  les chemins sur le graphe. Notons  $\mathcal{L}^0$  le  $\mathbb{Z}$ -module des diviseurs de degré 0. La  $\mathbb{Z}$ -algèbre  $\mathbb{T}_{\Gamma_0(pq)}$  engendrée par les opérateurs de Hecke  $T_l$ , pour  $l \neq p, q$  premier, agit sur ces groupes par l'action :

$$T_l((E, C_p)) = \sum_{C_l \subset E} (E/C_l, (C_p + C_l)/C_l),$$

où  $C_l$  parcourt les sous-groupes d'ordre  $l$  de  $E$ .

On définit l'accouplement de monodromie sur  $\mathcal{L}$  par :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} \text{card}(\text{End}(e_i)^*/\{\pm 1\}).$$

On remarque que les  $(e_i)_{i=1\dots n}$  forment une base orthogonale de  $\mathcal{L}$  pour cet accouplement, et que presque tous les  $e_i$  sont de norme 1.

**Définition 2.9.** Le vecteur d'Eisenstein (ou vecteur d'Eisenstein-Shimura) est défini par :

$$a_E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\text{card}(\text{End}(e_i)^*/\{\pm 1\})} e_i.$$

Il forme une base de  $(\mathcal{L}^0)^\perp$ , l'espace orthogonal à  $\mathcal{L}^0$  pour l'accouplement de monodromie.

On remarque que le module  $\mathcal{L}$  s'identifie naturellement avec le groupe des diviseurs des points supersinguliers de  $X_0(pq)(\mathbb{F}_{q^2})$ . Le vecteur d'Eisenstein sur  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  correspond



donc à un vecteur d'Eisenstein pour la courbe modulaire de niveau non premier  $X_0(pq)_{\mathbb{F}_q}$ . De la même façon, les vecteurs de Gross sur  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  qui seront introduits dans la définition 2.11 ci-dessous, correspondent à des vecteurs de Gross pour la courbe modulaire  $X_0(pq)_{\mathbb{F}_q}$ .

**Définition 2.10.** On note par  $s$  l'application qui a une arête  $e = (E_{j_k}, C_p)$  de  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  associe la courbe  $E_{j_k} \in S$ . On a :

$$s_*: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}_S$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i s(e_i).$$

De manière similaire on définit l'application  $t$  qui a l'arête  $e = (E_{j_k}, C_p)$  associe la courbe  $E_{j_k}/C_p \in S$ . On a :

$$t_*: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}_S$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i t(e_i).$$

Soit  $Y$  l'intersection des noyaux de  $s_*$  et  $t_*$ . C'est un sous  $\mathbb{Z}$ -module de  $\mathcal{L}^0$ . D'après [Ribet, corollary 4.5],  $Y$  est isomorphe à  $H_1(\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq}), \mathbb{Z})$ . On appelle les éléments de  $Y$  les cycles ou chemins fermés de  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$ .

**Définition 2.11.** Soit  $O_D$  un ordre quadratique imaginaire de discriminant  $D$ . On définit le vecteur de Gross sur le graphe dual de la fibre en  $p$  de la courbe de Shimura, (ou vecteur de Gross-Shimura),  $\gamma_D \in \frac{1}{12}\mathcal{L}$ , par :

$$\gamma_D = \sum_{i=1}^n \frac{h_i(D)}{\text{card}(\text{End}(e_i)^*/\{\pm 1\})} e_i,$$

où  $h_i(D)$  est le nombre de plongements optimaux de  $O_D$  dans l'ordre d'Eichler  $R_i = \text{End}(e_i)$ .

Lorsque  $q$  est scindé (ou  $p$  est inerte) dans l'ordre  $O_D$ , d'après la formule des traces d'Eichler, il n'existe aucun plongement de  $O_D$  dans les ordres d'Eichler de niveau  $p$  de  $B_{q\infty}$ , et le vecteur  $\gamma_D$  est nul (cf. [Vigneras, thm 5.11, p 92]). Lorsque  $q$  est inerte (ou ramifié et ne divisant pas le conducteur de  $O_D$ ) et  $p$  scindé (ou ramifié et ne divisant pas le conducteur de  $O_D$ ) dans  $O_D$ , le vecteur  $\gamma_D$  est non nul. De manière similaire à la proposition 2.5, la proposition suivante donne une description des arêtes du vecteur  $\gamma_D$  en terme de réduction modulo  $q$  des isogénies entre courbes elliptiques sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  à multiplication complexe par  $O_D$ . Nous nous restreignons au cas où  $q$  est inerte et  $p$  scindé dans  $O_D$ , car nous ne manipulerons dans la suite que des vecteurs satisfaisant ces hypothèses.

**Proposition 2.12.** *Soit  $O_D$  un ordre quadratique imaginaire de discriminant  $D$  et de nombre de classe  $h(D)$ , tel que  $q$  soit inerte et  $p$  scindé dans  $O_D$ . Fixons  $\mathcal{Q}$  une place de  $\overline{\mathbb{Q}}$  au dessus de  $q$ . Le vecteur  $\gamma_D$  est constitué de  $2h(D)$  arêtes, chacune de ces arêtes est pondérée par  $2/(\text{card}(\text{End}(e)^*/\{\pm 1\}))$ . Ces arêtes correspondent aux réductions modulo  $\mathcal{Q}$  des  $2h(D)$   $p$ -isogénies entre les  $h(D)$  courbes elliptiques sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  ayant multiplication complexe par  $O_D$ .*

*Démonstration.* Par la formule des traces d'Eichler, le nombre de plongements optimaux de  $O_D$  dans les ordres d'Eichler de niveau  $p$  de  $B_{q\infty}$  est

$$\sum_{i=1}^n h_i(D) = \left(1 - \left(\frac{D}{q}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{D}{p}\right)\right) h(D) = 4h(D).$$

Les ordres d'Eichler  $R_1, \dots, R_n$  de niveau  $p$  correspondent aux  $\text{End}(E_{j_i}, C_p)$ , où  $i = 1, \dots, g+1$  et  $C_p$  parcourt les sous-groupes d'ordre  $p$  de  $E_{j_i}$  à isomorphisme près.

Soit  $\Phi: O_D \rightarrow \text{End}(E_{j_i}, C_p)$  un plongement optimal. Le plongement induit  $\Phi': O_D \rightarrow \text{End}(E_{j_i})$  est également optimal. D'après la proposition 2.5, ce plongement  $\Phi'$  provient d'un couple  $(E, g)$ , où  $E/\overline{\mathbb{Q}}$  est une courbe elliptique à multiplication complexe par  $O_D$  munie d'un isomorphisme  $g: O_D \rightarrow \text{End}(E)$ , de telle sorte que  $(E \bmod \mathcal{Q}) = E_{j_i}$ . Comme la réduction modulo  $\mathcal{Q}$  réalise un isomorphisme  $E[p] \rightarrow E_{j_i}[p]$ , il existe un sous-groupe  $C$  d'ordre  $p$  de  $E$  tel que  $(C \bmod \mathcal{Q}) = C_p$ . Pour des raisons de compatibilité, on a  $g(O_D)$  inclus dans  $\text{End}(E, C)$ , c'est-à-dire  $\text{End}(E) = \text{End}(E, C) \simeq O_D$ . L'isogénie  $E \rightarrow E/C$  de noyau  $C$  est une  $p$ -isogénie entre  $E$  et une courbe elliptique  $E/C$  à multiplication complexe par  $O_D$ . Par la théorie de la multiplication complexe, une telle isogénie correspond à un idéal  $P$  de  $O_D$  au dessus de  $p$ . Comme  $p$  est scindé dans  $O_D$ , il existe deux isogénies distinctes de  $E$  dans des courbes elliptiques à multiplication complexe par  $O_D$ , et  $C$  est le noyau d'une de ces deux isogénies. Finalement un plongement optimal  $\Phi$  de  $O_D$  dans un ordre d'Eichler  $R = \text{End}(E_{j_i}, C_p)$  correspond à un des  $4h(D)$  couples  $((E, C), g)$  constitués d'une  $p$ -isogénie à isomorphisme près  $(E, C)$  entre courbes elliptiques sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  ayant multiplication complexe par  $O_D$ , et d'un isomorphisme  $g: O_D \rightarrow \text{End}(E, C)$ . Ici  $\Phi$  est la composée de  $g$  et de la réduction modulo  $\mathcal{Q}$  de  $\text{End}(E, C) \rightarrow \text{End}(E_{j_i}, C_p)$ . Cette correspondance est bijective par égalité des cardinaux.

□

La proposition suivante décrit l'action des involutions d'Atkin-Lehner sur les vecteurs de Gross.

**Proposition 2.13.** *Avec les hypothèses de la proposition 2.12, on a  $w_p(\gamma_D) = -\gamma_D$ , et  $w_q(\gamma_D) = \gamma_D$ .*

*Démonstration.* Prouvons d'abord que  $w_p(\gamma_D) = -\gamma_D$ . Soit  $\tau$  une permutation de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  telle que, pour chaque arête  $e_i$ , l'arête  $e_{\tau(i)}$  est son isogénie duale.

L'involution  $w_p$  agit sur les arêtes du graphe en envoyant  $e_i$  sur  $-e_{\tau(i)}$ . Ainsi on a

$$w_p(\gamma_D) = \sum_{i=1}^n \frac{h_i(D)}{\text{card}(\text{End}(e_i)^*/\{\pm 1\})} (-e_{\tau(i)}),$$

or  $\text{End}(e_i) \simeq \text{End}(e_{\tau(i)})$  donc  $w_p(\gamma_D) = -\gamma_D$ .

Rappelons que  $w_q$  agit comme le Frobenius sur les sommets et les arêtes du graphe. Soit  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  tel que  $\sigma$  se réduit en le Frobenius de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ . Considérons  $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}$  l'ensemble des  $p$ -isogénies à isomorphismes près entre courbes elliptiques sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  à multiplication complexe par  $O_D$ . D'après la proposition 2.12,

$$\gamma_D = \sum_{g \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}} \frac{1}{\text{card}(\text{End}(g \bmod q)^*/\{\pm 1\})} (g \bmod q),$$

donc

$$w_q(\gamma_D) = \sum_{g \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}} \frac{1}{\text{card}(\text{End}(g \bmod q)^*/\{\pm 1\})} (\sigma(g) \bmod q).$$

Or  $\sigma$  réalise une bijection de  $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}$  dans  $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}$  telle que pour tout  $g \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ , on a  $\text{End}(\sigma(g) \bmod q) \simeq \text{End}(g \bmod q)$  donc  $w_q(\gamma_D) = \gamma_D$ .  $\square$

La proposition 2.12 nous permet de décrire l'image de  $\gamma_D$  par les applications  $s_*$  et  $t_*$ , en comparant le vecteur  $\gamma_D$  sur  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  au vecteur  $\Gamma_D$  sur  $\mathcal{G}((X_0(q))_{\mathbb{F}_q})$ .

**Corollaire 2.14.** *Avec les hypothèses de la proposition 2.12, les arêtes du vecteur de Gross  $\gamma_D$  sur le graphe  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  sont distribuées de la façon suivante : de chaque sommet  $E_{j_k}$  dans  $S_1$  partent  $H_k(D)$  arêtes de  $\gamma_D$ . Chacune de ces arêtes est précédée du coefficient  $2/l$ , où  $l$  est la longueur de l'arête. En particulier, si le vecteur  $\gamma_D$  ne contient pas d'arêtes de longueur 2 ou 3, on a :*

$$s_*(\gamma_D) = t_*(\gamma_D) = 4\Gamma_D.$$

*Démonstration.* Dans la démonstration de la proposition 2.12, nous avons montré que les  $H_k(D)$  plongements optimaux de  $O_D$  dans l'ordre maximal  $\text{End}(E_{j_k})$  définissent  $2H_k(D)$  plongements optimaux de  $O_D$  dans des ordres d'Eichler de la forme  $\text{End}(E_{j_k}, C_p)$  qui correspondent à des arêtes de  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  partant du sommet  $E_{j_k} \in S_1$ . Cela se traduit par la formule suivante :

$$\sum_{\substack{i=1 \dots n \\ e_i = (E_{j_k}, C_p)}} h_i(D) = 2H_k(D).$$

Si le vecteur  $\gamma_D$  ne contient pas d'arêtes de longueur 2 ou 3, on a :

$$\gamma_D = \sum_{i=1}^n h_i(D) e_i.$$

On en déduit que

$$s_*(\gamma_D) = \sum_{k=1}^{g+1} 2H_k(D)E_{j_k} = 4\Gamma_D.$$

D'autre part pour chaque arête  $e = (E_{j_k}, C_p)$ , on a

$$s_*(-w_p(e)) = s_*((E_{j_k}/C_p, E_{j_k}[p]/C_p)) = E_{j_k}/C_p = t_*(e).$$

Ce qui implique que  $t_*(\gamma_D) = s_*(-w_p(\gamma_D))$ . Or d'après la proposition 2.13, on a  $\gamma_D = -w_p(\gamma_D)$ . En conséquence  $t_*(\gamma_D) = s_*(\gamma_D)$ , ce qui achève la preuve de la proposition.  $\square$

En appliquant la proposition 2.12, on décrit les arêtes de longueur  $\neq 1$ .

**Corollaire 2.15.** *Toutes les arêtes du graphe  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  sont de longueur 1 sauf dans les cas suivants :*

- Si  $q$  est inerte et  $p$  scindé dans  $O_{-4}$ , il existe exactement deux arêtes de longueur 2. Ces deux arêtes relient le sommet  $E_{1728} \in S_1$  au sommet  $E_{1728} \in S_2$  et sont échangées par  $w_q$ .
- Si  $q$  est inerte et  $p$  scindé dans  $O_{-3}$ , il existe exactement deux arêtes de longueur 3. Ces deux arêtes relient le sommet  $E_0 \in S_1$  au sommet  $E_0 \in S_2$  et sont échangées par  $w_q$ .

En particulier si on se place dans le cas non ramifié de Ogg (voir proposition 2.1), il existe deux arêtes exceptionnelles de longueur 2 sur  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$ . Donc une seule arête exceptionnelle de longueur 2 sur  $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$ .

*Démonstration.* Comme dans la proposition 2.6, on voit que les arêtes de longueur 2 sont les arêtes de  $\gamma_{-4}$  et les arêtes de longueur 3 sont les arêtes de  $\gamma_{-3}$ .

D'après la formule des traces d'Eichler, si  $q$  est scindé ou  $p$  est inerte dans  $O_{-4}$ , le vecteur  $\gamma_{-4}$  est nul. Supposons que  $q$  est inerte et  $p$  scindé dans  $O_{-4}$ . Soit  $E/\overline{\mathbb{Q}}$  l'unique courbe elliptique ayant multiplication par  $O_{-4}$ . On sait que le  $j$ -invariant de  $E$  est 1728. D'après la proposition 2.12, les arêtes de  $\gamma_{-4}$  correspondent aux réductions modulo  $q$  des 2  $p$ -isogénies entre courbes elliptiques à multiplication complexe par  $O_{-4}$ . Soit  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  qui se réduit en le Frobenius modulo  $q$ . Le morphisme  $\sigma$  agit comme la conjugaison complexe sur  $O_{-4}$ , car  $q$  est inerte dans  $O_{-4}$ . Comme  $p$  est scindé dans  $O_{-4}$ , l'idéal  $pO_{-4}$  se décompose en le produit de deux idéaux  $P$  et  $\sigma(P)$  dans  $O_D$ . Par la théorie de la multiplication complexe, ces idéaux correspondent à deux  $p$ -isogénies conjuguées par  $\sigma$ , notées  $[P]$  et  $[\sigma(P)]$ , de  $E \rightarrow E$ . Ces deux  $p$ -isogénies se réduisent en deux arêtes du graphe  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  reliant le sommet  $E_{1728} \in S_1$  au sommet  $E_{1728} \in S_2$ . Ces deux arêtes sont échangées par  $w_q$  qui agit comme le Frobenius sur le graphe, ce qui nous donne la forme annoncée de l'ensemble des arêtes de  $\gamma_{-4}$ .

On traite le cas des arêtes de longueur 3 de manière similaire.  $\square$

**Proposition 2.16.** *Soient  $O_{D_1}$  et  $O_{D_2}$  deux ordres quadratiques imaginaires de discriminant respectifs  $D_1$  et  $D_2$  premiers à  $q$ . Supposons aussi que  $q$  soit inerte dans  $O_{D_1}$  et  $O_{D_2}$ . Il existe une borne  $B$  dépendant de  $q$  telle que, pour  $p \geq B$ , si  $p$  est scindé dans ces deux ordres, les vecteurs de Gross  $\gamma_{D_1}$  et  $\gamma_{D_2}$  sur le graphe dual de la fibre en  $p$  de la courbe de Shimura  $X^{pq}$  sont sans arêtes communes.*

*Démonstration.* Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que  $O_{D_i} = \mathbb{Z}[\alpha_i]$ , pour  $i = 1, 2$ . Soient  $\phi_i: O_{D_i} \rightarrow \Omega$  des plongements optimaux des ordres  $O_{D_i}$  dans un même ordre maximal  $\Omega = \text{End}(E)$ , où  $E/\mathbb{F}_q$  est une courbe elliptique supersingulière.

Remarquons d'abord que  $\phi_1(\alpha_1)$  et  $\phi_2(\alpha_2)$  ne commutent pas. En effet, s'ils commutent,  $\mathbb{Q}[\phi_1(\alpha_1), \phi_2(\alpha_2)]$  est un sous-corps commutatif de  $B_{q\infty}$  strictement plus grand que  $\mathbb{Q}$ . Donc il est de degré 2 sur  $\mathbb{Q}$  et est isomorphe à  $\mathbb{Q}[\phi_1(\alpha_1)]$  et à  $\mathbb{Q}[\phi_2(\alpha_2)]$ , ce qui n'est possible que si ces deux derniers corps sont égaux. Comme les plongements  $\phi_i$  sont optimaux,  $\mathbb{Q}[\phi_i(\alpha_i)] \cap \Omega = \mathbb{Z}[\phi_i(\alpha_i)] = \phi_i(O_{D_i})$ , ce qui est impossible car, par hypothèse,  $O_{D_1} \neq O_{D_2}$ .

Comme dans le corollaire 2.14, chacun de ces plongements  $\phi_i$  définit deux plongements optimaux  $O_{D_i} \rightarrow \text{End}(E, C_{p,j}^i)$  dans des ordres d'Eichler de niveau  $p$ , où  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$  et  $C_{p,j}^i$  est un sous-groupe d'ordre  $p$  de  $E$ . Plus précisément  $C_{p,1}^i$  et  $C_{p,2}^i$  sont les deux sous-espaces propres du morphisme restreint  $\phi_i(\alpha_i)|_{E[p]}$ . Pour prouver que pour  $p$  assez grand il n'y a pas de plongement optimal de  $O_{D_1}$  et  $O_{D_2}$  dans un même ordre d'Eichler de niveau  $p$ , il suffit de prouver que pour  $p$  assez grand  $\phi_1(\alpha_1)|_{E[p]}$  et  $\phi_2(\alpha_2)|_{E[p]}$  n'ont pas d'espace propre commun. On identifie ces restrictions avec  $(\phi_1(\alpha_1) \bmod p)$  et  $(\phi_2(\alpha_2) \bmod p)$  qui sont des éléments de  $\Omega \otimes \mathbb{F}_p \simeq M_2(\mathbb{F}_p)$ . Comme  $\phi_1(\alpha_1)$  et  $\phi_2(\alpha_2)$  ne commutent pas dans  $B_{q\infty}$ , on a  $\mathbb{Q}[\phi_1(\alpha_1), \phi_2(\alpha_2)] = B_{q\infty}$ . Donc il existe une constante  $M \in \mathbb{Z}$  ne dépendant que de  $\phi_1(\alpha_1), \phi_2(\alpha_2)$ , telle que  $\Omega \subseteq \frac{1}{M}\mathbb{Z}[\phi_1(\alpha_1), \phi_2(\alpha_2)]$ . Pour  $p$  ne divisant pas  $M$ , on a  $\mathbb{Z}[\phi_1(\alpha_1), \phi_2(\alpha_2)] \otimes \mathbb{F}_p = M_2(\mathbb{F}_p)$ . Dans ce cas  $(\phi_1(\alpha_1) \bmod p)$  et  $(\phi_2(\alpha_2) \bmod p)$  n'ont pas d'espace propre commun, sinon ils engendreraient un sous-groupe de Borel de  $M_2(\mathbb{F}_p)$ .

Lorsque  $\phi_1$  et  $\phi_2$  parcourent les ensembles finis des plongements optimaux de  $O_{D_1}$  et  $O_{D_2}$  dans les ordres maximaux,  $M$  prend un nombre fini de valeurs. Donc pour  $p$  supérieur à toutes ces valeurs, les vecteurs  $\gamma_{D_1}$  et  $\gamma_{D_2}$  sont sans arête commune. □

### 3 Groupe des composantes de $\text{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$

On considère le modèle régulier  $\widetilde{X^{pq}/w_q}$  sur  $\mathbb{Z}_p$  du quotient d'Atkin-Lehner  $X^{pq}/w_q$ , obtenu par éclatement aux points singuliers du modèle décrit par Cherednik et Drinfeld. Parent et Yafaev ont prouvé le présent lemme sur le groupe des composantes de la fibre en  $p$  de la jacobienne du quotient d'Atkin-Lehner  $X^{pq}/w_q$ .

**Lemme 3.1.** *Soient  $p, q$  deux nombres premiers tels que  $g(X_0(q)) \geq 5$ ,  $q \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $p \equiv 5 \pmod{12}$  et  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ . Soient  $\mathcal{J}$  la composante irréductible exceptionnelle de  $X^{pq}/w_q$*

provenant de la multiplication par  $\zeta_4$  et  $J \neq \mathcal{J}$  une autre composante irréductible de  $\widetilde{X^{pq}/w_q}$ . Pour  $p \gg q$ , on a  $(p+1)(\mathcal{J} - J) \neq 0$  dans le groupe des composantes de  $\text{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$ .

*Démonstration.* Cela découle du lemme [ParentYafaev, lemma 3.2.3].  $\square$

Le but de ce paragraphe est de généraliser le lemme 3.1 en supprimant la condition  $p \equiv -1 \pmod{3}$ . Nous allons prouver le lemme ci-dessous :

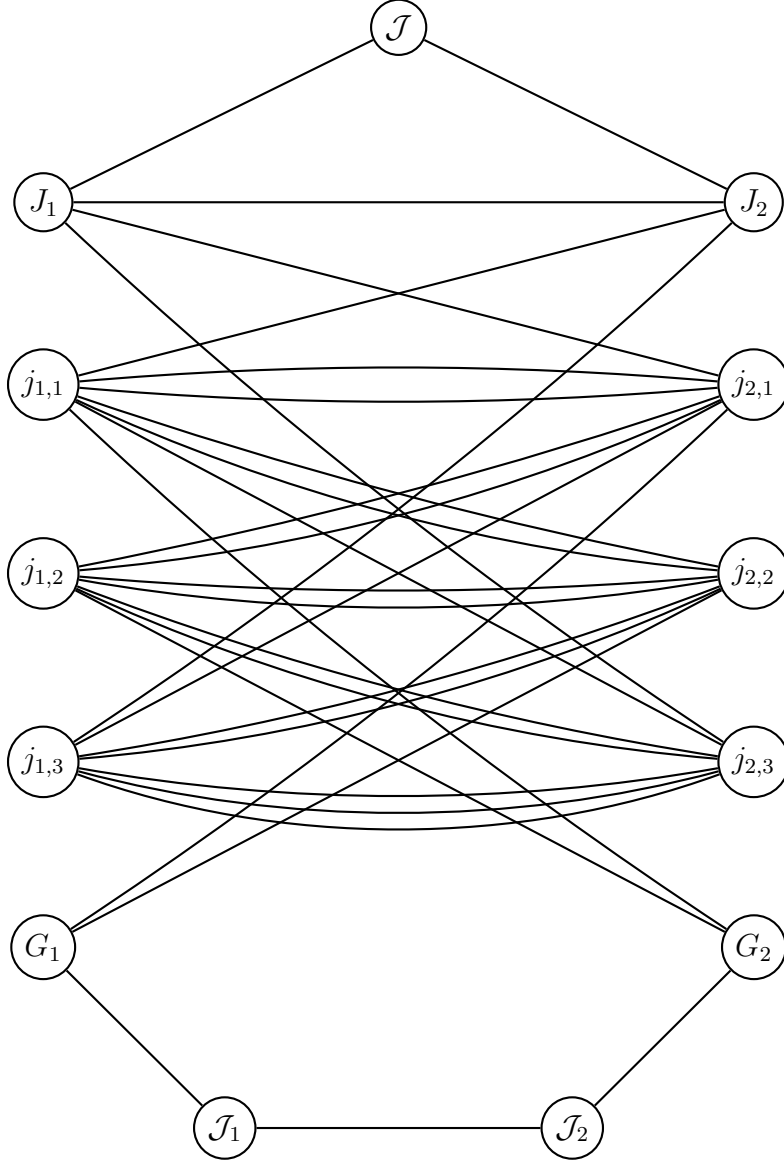
**Lemme 3.2.** *Soient  $p, q$  deux nombres premiers tels que  $g(X_0(q)) \geq 6$ ,  $q \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $p \equiv 1 \pmod{4}$  et  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ . Soient  $\mathcal{J}$  la composante irréductible exceptionnelle de  $\widetilde{X^{pq}/w_q}$  provenant de la multiplication par  $\zeta_4$  et  $J \neq \mathcal{J}$  une autre composante irréductible de  $\widetilde{X^{pq}/w_q}$ . Pour  $p \gg q$ , on a  $(p+1)(\mathcal{J} - J) \neq 0$  dans le groupe des composantes de  $\text{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$ .*

**Remarque 3.3.** D'après [Shimura, Prop. 1.43], le genre de  $X_0(q)$  est la partie entière  $\lfloor \frac{q+1}{12} \rfloor$  de  $\frac{q+1}{12}$  si  $q \not\equiv 1 \pmod{12}$  et  $\lfloor \frac{q+1}{12} \rfloor - 1$  si  $q \equiv 1 \pmod{12}$ . On en déduit que si  $q \geq 79$  alors  $g(X_0(q)) \geq 6$ . D'autre part d'après la définition 2.3, le poids du vecteur d'Eisenstein modulaire est  $w(A_E) = \sum_{k=1}^{g+1} (\text{card}(\text{End}(E_{j_k})^*/\{\pm 1\}))^{-1}$ , où  $g = g(X_0(q))$ . Comme, d'après le corollaire 2.6,  $\text{card}(\text{End}(E_{j_k})^*/\{\pm 1\}) = 1$  sauf au plus pour deux valeurs de  $j_k$ , on a  $w(A_E) > g(X_0(q)) - 1 \geq 5$ .

**Notations 3.4.** Pour faciliter la compréhension des notations qui suivent, nous invitons le lecteur à consulter l'exemple 3.5 ci-dessous. On note  $\mathcal{G}((\widetilde{X^{pq}/w_q})_{\mathbb{F}_p})$  le graphe dual de la fibre en  $p$  de  $\widetilde{X^{pq}/w_q}$ . Rappelons que ce graphe est le graphe obtenu à partir du graphe  $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$  en remplaçant chaque arête exceptionnelle de longueur  $l$  par une chaîne de  $l$  arêtes de longueur 1. On renvoie au corollaire 2.15 pour une description de ces arêtes. On désigne par  $S'_1 = S_1/w_q$  et  $S'_2 = S_2/w_q$  les deux partitions du graphe  $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$ . L'ensemble des sommets de  $\mathcal{G}((\widetilde{X^{pq}/w_q})_{\mathbb{F}_p})$  est l'union disjointe de  $S'_1$ ,  $S'_2$  et de l'ensemble des sommets exceptionnels que nous allons décrire. On note  $\mathcal{J}$  le sommet exceptionnel de  $\mathcal{G}((\widetilde{X^{pq}/w_q})_{\mathbb{F}_p})$  provenant de l'éclatement de  $(X^{pq}/w_q)/\mathbb{Z}_p$  en l'unique point singulier d'épaisseur 2. Le sommet  $\mathcal{J}$  est relié par une arête à chacun des deux sommets  $J_1 \in S'_1$  et  $J_2 \in S'_2$  correspondant au  $j$ -invariant  $1728 \pmod{q}$ . Lorsque  $q \equiv -1 \pmod{3}$  et  $p \equiv 1 \pmod{3}$ , on note  $G_1 \in S'_1$  et  $G_2 \in S'_2$  les deux sommets correspondant à la classe du  $j$ -invariant  $0 \pmod{q}$ . Les sommets  $G_1$  et  $G_2$  sont reliés à deux sommets exceptionnels  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  provenant de l'unique point singulier d'épaisseur 3 après éclatements successifs. On note par  $j_{1,1}, j_{1,2}, \dots, j_{1,l}$  les sommets de  $S'_1$  distincts de  $J_1$  et  $G_1$ . De même  $j_{2,1}, j_{2,2}, \dots, j_{2,l}$  désignent les sommets de  $S'_2$  distincts de  $J_2$  et  $G_2$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux sommets du graphe. On note  $N(a, b)$  le nombre d'arêtes entre les deux sommets  $a$  et  $b$ , et  $N(a)$  la puissance du sommet  $a$  (i. e. le nombre d'arêtes qui partent du sommet  $a$  ou arrivent au sommet  $a$ ).

**Exemple 3.5.** Graphe de  $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{13*47}/w_{47})_{\mathbb{F}_{13}}})$ .



Nous invitons le lecteur à se référer au présent exemple pour faciliter la compréhension des calculs qui suivent. (On note cependant que ce graphe ne satisfait pas à la condition du corollaire 3.9 ci-dessous. En effet dans cet exemple certains des sommets de  $S'_1$  ne sont pas reliés à tous les sommets de  $S'_2$ ).

La preuve du lemme 3.1 repose sur la description du groupe des composantes donnée par Raynaud [BLR, thm 1, p 274].

**Lemme 3.6.** (*« Loi K »*). Avec les notations du lemme 3.2, on a  $(p+1)(\mathcal{J} - J) = 0$  dans le groupe des composantes de  $\text{Jac}(\widetilde{X^{pq}/w_q})_{\mathbb{F}_p}$ , si et seulement s'il existe une fonction  $\nu$  de l'ensemble des sommets  $S$  de  $\mathcal{G}(\widetilde{X^{pq}/w_q})_{\mathbb{F}_p}$  dans  $\mathbb{Z}$  telle que pour chaque sommet  $C$  de  $\mathcal{G}(\widetilde{X^{pq}/w_q})_{\mathbb{F}_p}$ , on a l'égalité :

$$\sum_{D \mapsto C} \nu(C) - \nu(D) = \begin{cases} p+1 & \text{si } C = \mathcal{J}; \\ -(p+1) & \text{si } C = J; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où  $\sum_{D \mapsto C}$  désigne la somme faite sur tous les sommets  $D$  voisins du sommet  $C$  avec une multiplicité égale au nombre d'arêtes entre  $D$  et  $C$ . C'est-à-dire :

$$\sum_{D \in S} N(C, D)(\nu(C) - \nu(D)) = \begin{cases} p+1 & \text{si } C = \mathcal{J}; \\ -(p+1) & \text{si } C = J; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Consulter [ParentYafaev, Sublemma 3.1.3.1]. □

Le lemme 3.6 peut se traduire de manière électrodynamique, on pourra consulter à ce sujet [ParentYafaev, §3.1] ou [Edixhoven, II.1]. Identifions le graphe  $\mathcal{G}(\widetilde{X^{pq}/w_q})_{\mathbb{F}_p}$  à un circuit électrique de la manière suivante : les sommets du graphe sont les nœuds du circuit et les arêtes du graphe sont des fils reliant ces nœuds. Chacun de ces fils étant d'une résistance de 1 Ohm. Supposons que les nœuds  $\mathcal{J}$  et  $J$  soient reliés aux pôles d'un générateur électrique, et qu'un courant de  $p+1$  Ampères entre dans le circuit en le nœud  $J$  et quitte le circuit au nœud  $\mathcal{J}$ . Soit  $\nu$  une répartition des potentiels, exprimée en Volts, sur l'ensemble des nœuds du circuit, définie à une répartition constante près. La différence de potentiel entre deux nœuds reliés par un fil  $A$  et  $B$  est  $u(A, B) = \nu(A) - \nu(B)$ . Chaque fil entre  $A$  et  $B$  est parcouru par un courant (éventuellement d'intensité nulle) dirigé de  $A$  vers  $B$  si  $u(A, B) \geq 0$  et de  $B$  vers  $A$  si  $u(A, B) \leq 0$ . La loi d'Ohm affirme que si le fil  $c$ , de résistance  $r(c)$  est parcouru par un courant dirigé de  $A$  vers  $B$ , dont l'intensité est  $i(c)$  Ampères, alors la différence de potentiel  $u(A, B)$  est égale à  $r(c)i(c)$  Volts. Dans le cas qui nous intéresse  $i(c) = u(A, B) = \nu(A) - \nu(B)$  comme  $r(c) = 1$ . La loi des nœuds de Kirchhoff affirme que pour chaque nœud  $A$ , la somme des intensités des courants arrivant au nœud  $A$  est égale à la somme des intensités des courants partant du nœud  $A$ . En combinant la loi de Kirchhoff en un nœud  $C$  avec la loi d'Ohm sur tous les fils partant de  $C$ , on retrouve les équations du lemme 3.6. Or d'après [BLR, thm 1, p 274] la solution  $\nu$  de ce système est unique à une fonction constante près. Donc prouver que  $(p+1)(\mathcal{J} - J) \neq 0$



revient à prouver que le circuit électrique décrit ne peut pas admettre de répartition de potentiel  $\nu$  à valeurs entières.

Les lemmes suivants décrivent la répartition des arêtes de  $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$ .

**Lemme 3.7.** *Avec les hypothèses du lemme 3.2, fixons  $j \in \mathbb{F}_{q^2}$  un  $j$ -invariant supersingulier défini à action de  $\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$  près, et soit  $C$  le sommet de  $S'_1$  ou  $S'_2$  associé à ce  $j$ -invariant. Le nombre  $N(C)$  d'arêtes qui partent de  $C$  dans le graphe  $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$  est donné par :*

- $(p+1)$  si  $j$  appartient à  $\mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$  ;
- $(p+1)/2$  si  $j$  appartient à  $\mathbb{F}_q$  et  $j \not\equiv 0, 1728$  ;
- $(p+3)/4$  si  $j \equiv 1728$  ;
- $(p+1)/6$  si  $j \equiv 0$  et  $p \equiv -1 \pmod{3}$  ;
- $(p+5)/6$  si  $j \equiv 0$  et  $p \equiv 1 \pmod{3}$ .

*Démonstration.* Le nombre d'arêtes partant de chaque sommet non exceptionnel du graphe  $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$  est égal au nombre d'arêtes partant du sommet correspondant dans le graphe  $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$ . Le lemme [ParentYafaev, lemma 3.1.2] et sa preuve donnent le résultat.  $\square$

**Lemme 3.8.** *Soient  $j_1, j_2 \in \mathbb{F}_{q^2}$  deux  $j$ -invariants supersinguliers définis à action de  $\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$  près. On note  $C_1 \in S'_1$  et  $C_2 \in S'_2$  les sommets associés à ces  $j$ -invariants. On note  $\epsilon(C_1, C_2) = 2$  si  $j_1 \in \mathbb{F}_q$  et  $j_2 \in \mathbb{F}_q$  et  $\epsilon(C_1, C_2) = 1$  si  $j_1 \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$  ou  $j_2 \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ . Le nombre d'arêtes  $N(C_1, C_2)$  entre les sommets  $C_1$  et  $C_2$  dans le graphe  $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$  est :*

$$\frac{p+1}{w(A_E)} \times \frac{1}{\epsilon(C_1, C_2)w(C_1)w(C_2)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Où  $w(A_E) = \sum_{k=1}^{g+1} (\text{card}(\text{End}(E_{j_k})^*/\{\pm 1\}))^{-1}$  est le degré du diviseur  $A_E \in \mathcal{P}_S$ , et  $w(C_i) = \text{card}(\text{End}(E_{j_i})^*/\{\pm 1\})$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le lemme [ParentYafaev, lemma 3.1.2] qui donne le nombre d'arêtes  $N$  entre les deux sommets  $C_1$  et  $C_2$  dans  $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$ . Le nombre d'arêtes  $N(C_1, C_2)$  liant les deux sommets non exceptionnels  $C_1$  et  $C_2$  dans  $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$  étant égal à  $N$ , ou à  $N-1$  si  $\{C_1, C_2\} = \{J_1, J_2\}$  ou  $\{C_1, C_2\} = \{G_1, G_2\}$  et  $p \equiv 1 \pmod{3}$ .  $\square$

Une conséquence utile du lemme 3.8 est le corollaire suivant.

**Corollaire 3.9.** *Pour  $p \gg q$ , on a  $N(C_1, C_2) > 0$  pour tout  $C_1 \in S'_1$  et  $C_2 \in S'_2$ .*

Dans la suite nous supposons que cette condition est satisfaite.

Pour prouver le lemme 3.2, nous devons traiter le cas où  $p \equiv 1 \pmod{3}$ . Si  $q \equiv 1 \pmod{3}$ , la seule composante exceptionnelle est  $\mathcal{J}$  et la preuve de [ParentYafaev, lemma

3.1.3] reste valable. On se place dans le cas où  $q \equiv -1 \pmod{3}$ . Supposons d'abord que  $J$  n'est pas une des composantes exceptionnelles  $\mathcal{J}_1$  ou  $\mathcal{J}_2$ . Soient  $i$  et  $j$  tels que  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ . On note  $I(G_i) = 0$  si  $J \neq G_i$  et  $I(G_i) = p + 1$  si  $J = G_i$ . En appliquant la loi K (lemme 3.6) successivement aux sommets  $\mathcal{J}_i$  et  $\mathcal{J}_j$ , on trouve :

$$(\nu(\mathcal{J}_i) - \nu(\mathcal{J}_j)) + (\nu(\mathcal{J}_i) - \nu(G_i)) = 0,$$

$$(\nu(\mathcal{J}_j) - \nu(\mathcal{J}_i)) + (\nu(\mathcal{J}_j) - \nu(G_j)) = 0.$$

Soit :

$$\nu(G_i) - \nu(\mathcal{J}_i) = \nu(\mathcal{J}_i) - \nu(\mathcal{J}_j) = \nu(\mathcal{J}_j) - \nu(G_j).$$

Donc :

$$\nu(G_i) - \nu(G_j) = 3(\nu(G_i) - \nu(\mathcal{J}_i)). \quad (1)$$

D'autre part en appliquant la loi K au sommet  $G_i$ , on trouve :

$$N(G_i, G_j)(\nu(G_i) - \nu(G_j)) + (\nu(G_i) - \nu(\mathcal{J}_i)) + \sum_{D \in S'_j \setminus \{G_j\}} N(G_i, D)(\nu(G_i) - \nu(D)) = I(G_i).$$

En combinant avec l'égalité (1) (ou directement en appliquant la loi des résistances en série), on trouve :

$$(N(G_i, G_j) + \frac{1}{3})(\nu(G_i) - \nu(G_j)) + \sum_{D \in S'_j \setminus \{G_j\}} N(G_i, D)(\nu(G_i) - \nu(D)) = I(G_i).$$

Pour  $C_1$  et  $C_2$  différents de  $\mathcal{J}_1$  et de  $\mathcal{J}_2$  on pose :

$$N'(C_1, C_2) = \begin{cases} N(C_1, C_2) + 1/3 & \text{si } \{C_1, C_2\} = \{G_1, G_2\}; \\ N(C_1, C_2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci nous permet de considérer un système d'équations dont les inconnues sont les  $\nu(C)$  où  $C \in S'_1 \sqcup S'_2 \sqcup \{\mathcal{J}\}$ , c'est-à-dire  $C \neq \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ , et dont les coefficients sont les  $N'(C_1, C_2)$  pour  $C_1, C_2 \in S'_1 \sqcup S'_2 \sqcup \{\mathcal{J}\}$ . Pour prouver que ce système est sans solution entière, reprenons la preuve de [ParentYafaev, lemma 3.1.3] en remplaçant dans toutes les équations  $N(C_1, C_2)$  par  $N'(C_1, C_2)$ . La preuve de [ParentYafaev, lemma 3.1.3] utilise les valeurs asymptotiques (à  $O_q(\sqrt{p})$  près) de  $N(C_1, C_2)$ . Ces valeurs étant conservées lorsque on remplace  $N(C_1, C_2)$  par  $N'(C_1, C_2)$ . On obtient une preuve du lemme 3.2 dans le cas où  $J \neq \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ .

Il reste à prouver le lemme 3.2 dans le cas où  $J = \mathcal{J}_1$  ou  $\mathcal{J}_2$ . Comme l'involution  $w_p$  échange  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  et laisse invariant  $\mathcal{J}$ , il suffit de prouver le lemme suivant :

**Lemme 3.10.** *Avec les notations du lemme 3.2, supposons que  $q \equiv -1 \pmod{3}$  et  $p \equiv 1 \pmod{3}$ . Pour  $p \gg q$ , on a  $(p + 1)(\mathcal{J} - \mathcal{J}_1) \neq 0$  dans le groupe des composantes de  $\text{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$ .*

*Démonstration.* On suppose qu'il existe une répartition de potentiels entiers  $\nu$ , sur les sommets de  $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)}_{\mathbb{F}_p})$ , tel qu'un courant de  $p+1$  Ampères entre dans le circuit au sommet  $\mathcal{J}_1$  et le quitte en  $\mathcal{J}$ .

Nous allons prouver que pour  $p \gg q$  les potentiels  $\nu(j_{1,1}), \nu(j_{1,2}), \dots, \nu(j_{1,l})$  et  $\nu(j_{2,1}), \nu(j_{2,2}), \dots, \nu(j_{2,l})$  sont tous égaux (cf. sous-lemme 3.16). Puis nous obtiendrons une contradiction (cf. sous-lemmes 3.17 et 3.18). Fixons  $J_M$  un sommet ayant un potentiel maximal dans  $S'_1 \cup S'_2 \setminus \{G_1, G_2\}$ . Ainsi que  $J_m$  un sommet ayant un potentiel minimal dans  $S'_1 \cup S'_2 \setminus \{J_1, J_2\}$ .

**Sous-lemme 3.11.** Soient  $i, j$  tels que  $\{i, j\} = \{1, 2\}$  et  $J_M \in S'_j$ . On a la majoration suivante pour l'intensité du courant que  $J_M$  reçoit de  $G_i$  :

$$N(J_M, G_i)(\nu(G_i) - \nu(J_M)) \leq \frac{6(p+1)}{(3w(A_E) - 1)\epsilon(G_i, J_M)w(J_M)} + O_q(\sqrt{p}).$$

*Démonstration.* Remarquons que si  $\nu(G_i) \leq \nu(J_M)$  la proposition est évidente. On va donc supposer  $\nu(G_i) > \nu(J_M)$ . Par la loi K exprimée en le sommet  $G_i$ ,

$$\sum_{D \mapsto G_i} (\nu(G_i) - \nu(D)) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\substack{D \mapsto G_i \\ D \neq G_j, \mathcal{J}_i}} (\nu(G_i) - \nu(D)) = N(G_j, G_i)(\nu(G_j) - \nu(G_i)) + (\nu(\mathcal{J}_i) - \nu(G_i)). \quad (2)$$

Nous allons majorer  $N(G_j, G_i)(\nu(G_j) - \nu(G_i)) + (\nu(\mathcal{J}_i) - \nu(G_i))$ . En appliquant la loi K au sommet  $\mathcal{J}_1$  on trouve :

$$(\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1)) + (\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(\mathcal{J}_2)) = p+1;$$

et en appliquant la loi K au sommet  $\mathcal{J}_2$  on obtient

$$\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(\mathcal{J}_2) = \nu(\mathcal{J}_2) - \nu(G_2). \quad (3)$$

Donc on a

$$(\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1)) + (\nu(\mathcal{J}_2) - \nu(G_2)) = p+1. \quad (4)$$

D'après [ParentYafaev, Sublemma 3.1.3.2], on a  $\nu(\mathcal{J}_1) \geq \nu(G_1), \nu(\mathcal{J}_2)$  donc  $\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1) \geq 0$  et  $\nu(\mathcal{J}_2) - \nu(G_2) = \nu(\mathcal{J}_1) - \nu(\mathcal{J}_2) \geq 0$  d'après l'égalité (3). On a donc

$$\nu(\mathcal{J}_i) - \nu(G_i) \leq p+1, \quad (5)$$

On applique la loi K au sommet  $G_j$  :

$$\sum_{\substack{D \mapsto G_j \\ D \neq G_i, \mathcal{J}_j}} (\nu(D) - \nu(G_j)) = N(G_j, G_i)(\nu(G_j) - \nu(G_i)) + (\nu(G_j) - \nu(\mathcal{J}_j)).$$

Si on suppose  $\nu(G_j) > \nu(G_i)$ , on a par hypothèse  $\nu(G_i) > \nu(J_M) \geq \nu(D)$  pour tout  $D \in (S'_1 \sqcup S'_2) \setminus \{G_1, G_2\}$ , on en déduit  $\nu(G_j) > \nu(D)$  et

$$N(G_i, G_j)(\nu(G_j) - \nu(G_i)) \leq \nu(\mathcal{J}_j) - \nu(G_j). \quad (6)$$

En combinant l'égalité (4) avec l'inégalité (6) si  $\nu(G_j) > \nu(G_i)$  et en considérant l'inégalité (5) si  $\nu(G_j) \leq \nu(G_i)$ , on trouve l'inégalité suivante :

$$N(G_j, G_i)(\nu(G_j) - \nu(G_i)) + (\nu(\mathcal{J}_i) - \nu(G_i)) \leq p + 1. \quad (7)$$

En combinant l'égalité (2) avec la majoration (7), on trouve :

$$\sum_{\substack{D \mapsto G_i \\ D \neq G_j, \mathcal{J}_i}} (\nu(G_i) - \nu(D)) \leq p + 1.$$

Comme  $J_M$  a un potentiel maximal parmi tous les sommets adjacents à  $G_i$  différents de  $G_j$  et  $\mathcal{J}_i$ , on a

$$\sum_{\substack{D \mapsto G_i \\ D \neq G_j, \mathcal{J}_i}} (\nu(G_i) - \nu(J_M)) \leq p + 1.$$

Soit :

$$(N(G_i) - N(G_i, G_j) - N(G_i, \mathcal{J}_i))(\nu(G_i) - \nu(J_M)) \leq p + 1$$

Soit  $C$  l'intensité du courant que  $J_M$  reçoit de  $G_i$ , on a l'inégalité :

$$C = N(G_i, J_M)(\nu(G_i) - \nu(J_M)) \leq N(G_i, J_M) \frac{(p + 1)}{(N(G_i) - N(G_i, G_j) - 1)}.$$

On utilise les lemmes 3.7 et 3.8 :

$$\begin{aligned} C &\leq \frac{p + 1}{(p + 5)/6 - 1 - (p + 1)/(18w(A_E)) + O_q(\sqrt{p})} \left( \frac{p + 1}{w(A_E)\epsilon(G_i, J_M)3w(J_M)} + O_q(\sqrt{p}) \right). \\ &\leq \left( \frac{18w(A_E)}{3w(A_E) - 1} + \frac{O_q(\sqrt{p})}{p + 1} \right) \left( \frac{p + 1}{w(A_E)\epsilon(G_i, J_M)3w(J_M)} + O_q(\sqrt{p}) \right). \end{aligned}$$

Finalement :

$$C \leq \frac{6(p + 1)}{(3w(A_E) - 1)\epsilon(G_i, J_M)w(J_M)} + O_q(\sqrt{p}).$$

□

On démontre un résultat similaire pour  $J_m$ .

**Sous-lemme 3.12.** Soient  $i, j$  tels que  $\{i, j\} = \{1, 2\}$  et  $J_m \in S'_j$ . On a la majoration suivante pour le courant que  $J_m$  donne à  $J_i$  :

$$N(J_m, J_i)(\nu(J_m) - \nu(J_i)) \leq \frac{4(p + 1)}{(2w(A_E) - 1)\epsilon(J_i, J_m)w(J_m)} + O_q(\sqrt{p}).$$

*Démonstration.* Remarquons que si  $\nu(J_i) \geq \nu(J_m)$  la proposition est évidente, nous supposons dans la suite que  $\nu(J_i) < \nu(J_m)$ . Par la loi K exprimée en le sommet  $J_i$ ,

$$\sum_{\substack{D \mapsto J_i \\ D \neq J_j, \mathcal{J}}} \nu(D) - \nu(J_i) = N(J_i, J_j)(\nu(J_i) - \nu(J_j)) + (\nu(J_i) - \nu(\mathcal{J})). \quad (8)$$

Nous allons majorer la quantité  $N(J_i, J_j)(\nu(J_i) - \nu(J_j)) + (\nu(J_i) - \nu(\mathcal{J}))$ . En appliquant la loi K au sommet  $\mathcal{J}$ , on trouve :

$$(\nu(J_i) - \nu(\mathcal{J})) + (\nu(J_j) - \nu(\mathcal{J})) = p + 1 \quad (9)$$

D'après [ParentYafaev, Sublemma 3.1.3.2] on a  $\nu(\mathcal{J}) \leq \nu(J_j)$ , donc

$$\nu(J_i) - \nu(\mathcal{J}) \leq p + 1 \quad (10)$$

On applique la loi K au sommet  $J_j$  :

$$\sum_{\substack{D \mapsto J_j \\ D \neq J_i, \mathcal{J}}} \nu(D) - \nu(J_j) = N(J_i, J_j)(\nu(J_j) - \nu(J_i)) + \nu(J_j) - \nu(\mathcal{J}).$$

Si  $\nu(J_j) < \nu(J_i)$ , alors comme par hypothèse  $\nu(J_i) < \nu(J_m) \leq \nu(D)$  pour tout sommet  $D \in S'_1 \sqcup S'_2 \setminus \{J_1, J_2\}$ , on a  $\nu(J_j) \leq \nu(D)$  et

$$N(J_i, J_j)(\nu(J_i) - \nu(J_j)) \leq \nu(J_j) - \nu(\mathcal{J}) \quad (11)$$

En combinant l'inégalité (11) avec l'égalité (9) si  $\nu(J_j) < \nu(J_i)$  et en considérant l'inégalité (10) si  $\nu(J_j) \geq \nu(J_i)$ , on trouve la majoration :

$$N(J_i, J_j)(\nu(J_i) - \nu(J_j)) + (\nu(J_i) - \nu(\mathcal{J})) \leq p + 1 \quad (12)$$

En combinant cette inégalité (12) avec l'égalité (8), on trouve :

$$\sum_{\substack{D \mapsto J_i \\ D \neq J_j, \mathcal{J}}} \nu(D) - \nu(J_i) \leq p + 1.$$

Comme  $J_m$  a un potentiel minimal parmi tous les sommets adjacents à  $J_i$  différents de  $J_j$  et  $\mathcal{J}$ , on a

$$(N(J_i) - N(J_i, \mathcal{J}) - N(J_i, J_j))(\nu(J_m) - \nu(J_i)) \leq p + 1,$$

donc

$$\nu(J_m) - \nu(J_i) \leq \frac{p + 1}{N(J_i) - 1 - N(J_i, J_j)}.$$

On utilise les lemmes 3.7 et 3.8 :

$$\nu(J_m) - \nu(J_i) \leq \frac{p + 1}{(p + 3)/4 - 1 - (p + 1)/(w(A_E)8) + O_q(\sqrt{p})}$$

Soit

$$\nu(J_m) - \nu(J_i) \leq \frac{8w(A_E)}{2w(A_E) - 1} + \frac{O_q(\sqrt{p})}{p+1}.$$

D'autre part, le courant  $C$  que  $J_m$  donne à  $J_i$  est :

$$\begin{aligned} C &= N(J_i, J_m)(\nu(J_m) - \nu(J_i)). \\ &= \left( \frac{p+1}{w(A_E)2\epsilon(J_i, J_m)w(J_m)} + O_q(\sqrt{p}) \right) (\nu(J_m) - \nu(J_i)). \end{aligned}$$

D'où l'inégalité :

$$C \leq \frac{4(p+1)}{(2w(A_E) - 1)\epsilon(J_i, J_m)w(J_m)} + O_q(\sqrt{p}).$$

□

Nous allons prouver que  $J_M$  ne peut pas être égal à  $J_1$  ou  $J_2$  et que  $J_m$  ne peut pas être  $G_1$  ou  $G_2$ .

**Sous-lemme 3.13.** Pour  $p \gg q$ , on a les inégalités :  $\nu(J_1), \nu(J_2) < \nu(J_M)$  et  $\nu(G_1), \nu(G_2) > \nu(J_m)$ .

*Démonstration.* Supposons que pour  $j = 1$  ou  $2$  on a  $J_j = J_M$ , nous allons obtenir une contradiction pour  $p \gg q$ . En appliquant la loi de Kirchhoff au sommet  $J_j$  on obtient :

$$\sum_{\substack{D \mapsto J_j \\ D \neq \mathcal{J}, G_i}} \nu(D) - \nu(J_j) = N(J_j, G_i)(\nu(J_j) - \nu(G_i)) + \nu(J_j) - \nu(\mathcal{J});$$

où  $i$  est tel que  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ . Par hypothèse, pour tout sommet  $D$  adjacent à  $J_j$  et différent de  $\mathcal{J}$  et de  $G_i$ , on a  $\nu(D) \leq \nu(J_j)$ . D'où :

$$N(J_j, G_i)(\nu(G_i) - \nu(J_j)) \geq \nu(J_j) - \nu(\mathcal{J}). \quad (13)$$

On applique le sous-lemme 3.11 à  $J_j = J_M$  :

$$N(J_j, G_i)(\nu(G_i) - \nu(J_j)) \leq \frac{3(p+1)}{2(3w(A_E) - 1)} + O_q(\sqrt{p}). \quad (14)$$

D'autre part en appliquant la loi K à  $\mathcal{J}$  on trouve :

$$\nu(\mathcal{J}) - \nu(J_1) + \nu(\mathcal{J}) - \nu(J_2) = -(p+1),$$

comme  $\nu(J_1), \nu(J_2) \leq \nu(J_j)$  on en déduit que :

$$\nu(J_j) - \nu(\mathcal{J}) \geq (p+1)/2. \quad (15)$$

En combinant ces trois inégalités (13), (14) et (15) on trouve :

$$\frac{p+1}{2} \leq \frac{3(p+1)}{2(3w(A_E) - 1)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Ce qui est contradictoire pour  $p \gg q$  comme  $w(A_E) > 4/3$  d'après la remarque 3.3.

Supposons que pour  $j = 1$  ou  $2$  on a  $G_j = J_m$ , nous allons obtenir une contradiction pour  $p \gg q$ . En appliquant la loi de Kirchhoff au sommet  $G_j$  on obtient :

$$\sum_{\substack{D \mapsto G_j \\ D \neq \mathcal{J}_j, J_i}} \nu(D) - \nu(G_j) = N(G_j, J_i)(\nu(G_j) - \nu(J_i)) + \nu(G_j) - \nu(\mathcal{J}_j);$$

où  $i$  est tel que  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ . Par hypothèse, pour tout sommet  $D$  adjacent à  $G_j$  et différent de  $\mathcal{J}_j$  et de  $J_i$ , on a  $\nu(D) \geq \nu(G_j)$ . D'où :

$$\nu(\mathcal{J}_j) - \nu(G_j) \leq N(G_j, J_i)(\nu(G_j) - \nu(J_i)),$$

on applique le sous-lemme 3.12 à  $G_j = J_m$  :

$$\nu(\mathcal{J}_j) - \nu(G_j) \leq \frac{2(p+1)}{3(2w(A_E) - 1)} + O_q(\sqrt{p}). \quad (16)$$

D'autre part, en appliquant la loi K au sommet  $\mathcal{J}_1$

$$\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1) + \nu(\mathcal{J}_1) - \nu(\mathcal{J}_2) = p + 1, \quad (17)$$

et en appliquant la loi K au sommet  $\mathcal{J}_2$

$$\nu(\mathcal{J}_2) - \nu(G_2) + \nu(\mathcal{J}_2) - \nu(\mathcal{J}_1) = 0,$$

soit

$$\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_2) = 2(\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(\mathcal{J}_2)). \quad (18)$$

En combinant les deux égalités (17) et (18), on obtient :

$$\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1) + \frac{1}{2}(\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_2)) = p + 1. \quad (19)$$

Comme  $\nu(G_j) \leq \nu(G_1), \nu(G_2)$ , on a l'inégalité :  $3/2(\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_j)) \geq p + 1$ . Si  $j = 1$  on en déduit que  $\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1) \geq 2/3(p + 1)$ . Si  $j = 2$ , en utilisant (18), on obtient  $\nu(\mathcal{J}_2) - \nu(G_2) \geq 1/3(p + 1)$ . Dans tous les cas on a :

$$\nu(\mathcal{J}_j) - \nu(G_j) \geq \frac{1}{3}(p + 1).$$

En combinant avec l'inégalité (16) :

$$\frac{1}{3}(p + 1) \leq \frac{2(p+1)}{3(2w(A_E) - 1)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Ce qui est impossible si  $p \gg q$  comme  $w(A_E) > 3/2$  d'après la remarque 3.3.  $\square$

On suppose dans la suite que les hypothèses du sous-lemme 3.13 ci-dessus sont satisfaites.

**Sous-lemme 3.14.** Soient  $i, j$  tels que  $\{i, j\} = \{1, 2\}$  et  $J_M \in S'_j$ . Pour  $p \gg q$ , le potentiel  $\nu(J_M)$  ne peut pas être strictement supérieur au potentiel de 3 sommets ou plus de  $S'_i$ .

*Démonstration.* D'après les hypothèses,  $\nu(J_M)$  est supérieur aux potentiels de tous les sommets de  $S'_i \setminus \{G_i\}$ . Supposons que  $\nu(J_M)$  est strictement supérieur au potentiel de 3 sommets  $D_1, D_2, D_3$  de  $S'_i$ . On applique la loi K au sommet  $J_M$  en remarquant que  $J_M \neq J_j$  d'après le sous-lemme 3.13 :

$$\sum_{\substack{D \mapsto J_M \\ D \neq G_i}} \nu(J_M) - \nu(D) = N(J_M, G_i)(\nu(G_i) - \nu(J_M)).$$

Comme  $\nu(J_M) - \nu(D) \geq 0$  pour  $D \in S'_i \setminus \{G_i\}$ , on a  $\nu(G_i) - \nu(J_M) \geq 0$ , donc  $G_i \notin \{D_1, D_2, D_3\}$ . On a donc

$$\sum_{k=1}^3 N(J_M, D_k)(\nu(J_M) - \nu(D_k)) \leq N(J_M, G_i)(\nu(G_i) - \nu(J_M)). \quad (20)$$

Par hypothèse,  $\nu(J_M) - \nu(D_k) \geq 1$ , on en déduit l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^3 N(J_M, D_k) \leq N(J_M, G_i)(\nu(G_i) - \nu(J_M)).$$

On rappelle que

$$N(J_M, D_k) = \frac{p+1}{w(A_E)\epsilon(J_M, D_k)w(J_M)w(D_k)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Comme  $\epsilon(J_M, D_k) \leq \epsilon(G_i, J_M)$  et  $w(D_k) = 1$  sauf pour  $D_k = J_i$ , auquel cas  $w(J_i) = 2$ .

$$\sum_{k=1}^3 N(J_M, D_k) \geq \frac{5}{2} \times \frac{(p+1)}{w(A_E)\epsilon(G_i, J_M)w(J_M)} + O_q(\sqrt{p}).$$

En combinant avec l'inégalité (20) et le sous-lemme 3.11 on obtient :

$$\frac{5(p+1)}{2w(A_E)\epsilon(G_i, J_M)w(J_M)} + O_q(\sqrt{p}) \leq \frac{6(p+1)}{(3w(A_E) - 1)w(J_M)\epsilon(G_i, J_M)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Comme d'après la remarque 3.3  $w(A_E) > 5/2$ , on obtient une contradiction pour  $p \gg q$ .  $\square$

On démontre un résultat similaire pour  $J_m$ .



**Sous-lemme 3.15.** Soient  $i, j$  tels que  $\{i, j\} = \{1, 2\}$  et  $J_m \in S'_j$ . Le potentiel  $\nu(J_m)$  ne peut pas être strictement inférieur au potentiel de 3 sommets ou plus de  $S'_i$ .

*Démonstration.* D'après les hypothèses,  $\nu(J_m)$  est inférieur à tous les potentiels des sommets de  $S'_i \setminus \{J_i\}$ . Supposons en outre que  $\nu(J_m)$  est strictement inférieur au potentiel de 3 sommets  $D_1, D_2, D_3$  de  $S'_i$ . On applique la loi K au sommet  $J_m$  en notant que  $J_m \neq J_j$  par le sous-lemme 3.13 :

$$\sum_{\substack{D \mapsto J_m \\ D \neq J_i}} \nu(D) - \nu(J_m) = N(J_m, J_i)(\nu(J_m) - \nu(J_i)).$$

Comme  $\nu(D) - \nu(J_m) \geq 0$  pour tout  $D \in S'_i \setminus \{J_i\}$ , on a  $\nu(J_m) - \nu(J_i) \geq 0$ , donc  $J_i \notin \{D_1, D_2, D_3\}$ . On a :

$$\sum_{k=1}^3 N(D_k, J_m)(\nu(D_k) - \nu(J_m)) \leq N(J_m, J_i)(\nu(J_m) - \nu(J_i)).$$

Comme par hypothèse,  $\nu(D_k) - \nu(J_m) \geq 1$  pour  $i = 1, 2, 3$ , on a :

$$\sum_{k=1}^3 N(D_k, J_m) \leq N(J_m, J_i)(\nu(J_m) - \nu(J_i)).$$

Soit en appliquant le lemme 3.8

$$\sum_{k=1}^3 \frac{p+1}{w(A_E)\epsilon(J_m, D_k)w(J_m)w(D_k)} + O_q(\sqrt{p}) \leq N(J_m, J_i)(\nu(J_m) - \nu(J_i)).$$

Remarquons que  $\epsilon(J_m, D_k) \leq \epsilon(J_i, J_m)$  et  $w(D_k) = 1$  sauf pour  $D_k = G_i$ , auquel cas  $w(G_i) = 3$ . On en déduit :

$$\frac{(7/3)(p+1)}{w(A_E)w(J_m)\epsilon(J_i, J_m)} + O_q(\sqrt{p}) \leq N(J_m, J_i)(\nu(J_m) - \nu(J_i)).$$

En utilisant la majoration donnée par le sous-lemme 3.12, on obtient :

$$\frac{(7/3)(p+1)}{w(A_E)w(J_m)\epsilon(J_i, J_m)} + O_q(\sqrt{p}) \leq \frac{4(p+1)}{(2w(A_E) - 1)w(J_m)\epsilon(J_i, J_m)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Ce qui est contradictoire pour  $p \gg q$  comme  $w(A_E) > 7/2$  d'après la remarque 3.3. □

**Sous-lemme 3.16.** Sous l'hypothèse que  $g(X_0(q)) \geq 6$ , pour  $p \gg q$  les potentiels  $\nu(j_{1,1})$ ,  $\nu(j_{1,2}), \dots, \nu(j_{1,l})$  et  $\nu(j_{2,1}), \nu(j_{2,2}), \dots, \nu(j_{2,l})$  sont tous égaux. En particulier  $\nu(J_M) = \nu(J_m)$ .

*Démonstration.* Notons  $n$  le cardinal de  $S'_1$  (et  $S'_2$ ). On rappelle que  $S'_1 = S_1/w_q$  (cf. notations 3.4), que le cardinal de  $S_1$  est  $g(X_0(q)) + 1$ , et que  $w_q$  laisse fixe au moins les deux sommets  $J_1$  et  $G_1$  de  $S_2$ . Donc  $n \geq 2 + (g(X_0(q)) - 1)/2$ , on en déduit  $n \geq 5$ .

Pour  $i = 1, 2$ , on fixe  $J_{i,M}$  un sommet ayant un potentiel maximal dans l'ensemble  $S'_i \setminus \{G_i\}$ . Ainsi que  $J_{i,m}$  un sommet dans l'ensemble  $S'_i \setminus \{J_i\}$  ayant un potentiel minimal. Supposons que  $\nu(J_{1,M}) \neq \nu(J_{2,M})$ , alors  $J_M$  a un potentiel strictement supérieur au potentiel de  $n - 1$  sommets ou plus de la répartition opposée. Pour  $p \gg q$  cela contredit le sous-lemme 3.14. De même si  $\nu(J_{1,m}) \neq \nu(J_{2,m})$ , alors  $J_m$  a un potentiel strictement inférieur au potentiel de  $n - 1$  sommets ou plus de la répartition opposée ce qui contredit le sous-lemme 3.15 pour  $p \gg q$ . On a donc  $\nu(J_{1,M}) = \nu(J_{2,M})$  et  $\nu(J_{1,m}) = \nu(J_{2,m})$  pour  $p \gg q$ .

Supposons que  $\nu(J_{1,m}) = \nu(J_{2,m}) < \nu(J_{1,M}) = \nu(J_{2,M})$ . Si  $\nu(J_{1,M})$  est strictement supérieur au potentiel de 3 sommets ou plus de  $S'_2$  on peut appliquer le sous-lemme 3.14 pour  $J_M = J_{1,M}$ . Sinon il y a au plus 2 sommets  $D_1, D_2$  de  $S'_2$  de potentiel strictement inférieur à  $\nu(J_{1,M})$ , tous les sommets de  $S'_2 \setminus \{D_1, D_2\}$  sont de potentiel supérieur ou égal à  $\nu(J_{1,M})$ , et strictement supérieur à  $J_{1,m}$ . Il y a donc  $n - 2$  sommets ou plus de  $S'_2$  de potentiel strictement supérieur au potentiel de  $J_m = J_{1,m}$ . Ceci contredit le sous-lemme 3.15. Finalement pour  $p \gg q$  on doit avoir  $\nu(J_{1,m}) = \nu(J_{2,m}) = \nu(J_{1,M}) = \nu(J_{2,M})$ , ce qui démontre la proposition.  $\square$

Dans toute la suite nous supposons que les hypothèses du sous-lemme 3.16 sont satisfaites. Les potentiels  $\nu(j_{1,1}), \nu(j_{1,2}), \dots, \nu(j_{1,l})$  et  $\nu(j_{2,1}), \nu(j_{2,2}), \dots, \nu(j_{2,l})$  sont donc tous égaux à  $\nu(J_m) = \nu(J_M)$ .

**Sous-lemme 3.17.** On a  $\nu(J_1) \equiv \nu(J_2) \pmod{2}$ . En outre  $\nu(J_1) \neq \nu(J_2)$ .

*Démonstration.* En appliquant la loi K au sommet  $\mathcal{J}$  on obtient :

$$\nu(J_1) - \nu(\mathcal{J}) + \nu(J_2) - \nu(\mathcal{J}) = p + 1.$$

En considérant cette égalité modulo 2 on trouve :

$$\nu(J_1) \equiv \nu(J_2) \pmod{2},$$

ce qui démontre le premier point.

Supposons que  $\nu(J_1) = \nu(J_2)$ . En appliquant la loi K au sommet  $J_1$  on trouve :

$$\sum_{k=1}^l N(J_1, j_{2,k})(\nu(j_{2,k}) - \nu(J_1)) + N(J_1, G_2)(\nu(G_2) - \nu(J_1)) + (\nu(\mathcal{J}) - \nu(J_1)) = 0.$$

En appliquant la loi K au sommet  $J_2$  on trouve :

$$\sum_{k=1}^l N(J_2, j_{1,k})(\nu(j_{1,k}) - \nu(J_2)) + N(J_2, G_1)(\nu(G_1) - \nu(J_2)) + (\nu(\mathcal{J}) - \nu(J_2)) = 0.$$

Or  $N(J_1, j_{2,k}) = N(J_2, j_{1,k})$ , et  $N(J_2, G_1) = N(J_1, G_2)$ . En outre pour  $p \gg q$ , par le sous-lemme 3.16, on a  $\nu(j_{2,k}) = \nu(j_{1,k})$  et, par le corollaire 3.9,  $N(J_1, G_2) > 0$ . On en déduit :  $\nu(G_1) = \nu(G_2)$ . D'autre part en appliquant successivement la loi K aux sommets  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$ , on trouve (voir preuve du sous-lemme 3.13 formule (19) ou appliquer la loi des résistances en série) :

$$\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1) + \frac{1}{2}(\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_2)) = p + 1$$

En considérant cette égalité modulo 3, comme par hypothèse  $p \equiv 1 \pmod{3}$ , on a :

$$\nu(G_2) - \nu(G_1) \equiv 2 \pmod{3},$$

En particulier  $\nu(G_1) \neq \nu(G_2)$  ce qui est contradictoire. On a donc  $\nu(J_1) \neq \nu(J_2)$ .  $\square$

Le sous-lemme 3.18 suivant nous permet de conclure à une contradiction avec le sous-lemme 3.17 pour  $p \gg q$ , ce qui achève la preuve du lemme 3.10.  $\square$

**Sous-lemme 3.18.** On a  $|\nu(J_1) - \nu(J_2)| < 2$ .

*Démonstration.* Soient  $i$  et  $j$  tels que  $\{i, j\} = \{1, 2\}$  et  $\nu(J_i) \leq \nu(J_j)$ . Supposons que  $\nu(J_j) - \nu(J_i) \geq 2$ . D'après le sous-lemme 3.13,  $\nu(J_M) > \nu(J_j)$ , donc  $\nu(J_M) \geq \nu(J_i) + 3$ . En outre d'après les sous-lemmes 3.13 et 3.16, on a  $\nu(G_j) > \nu(J_m) = \nu(J_M) \geq \nu(J_i) + 3$ . Donc pour tout sommet  $D \in S_j$ , on a  $\nu(D) - \nu(J_i) \geq 3$ . En appliquant la loi K à  $J_i$  on trouve :

$$\sum_{\substack{D \mapsto J_i \\ D \neq \mathcal{J}}} (\nu(D) - \nu(J_i)) = \nu(J_i) - \nu(\mathcal{J}),$$

Soit :

$$\sum_{\substack{D \mapsto J_i \\ D \neq \mathcal{J}}} 3 \leq \nu(J_i) - \nu(\mathcal{J}),$$

c'est-à-dire :

$$3(N(J_i) - 1) \leq \nu(J_i) - \nu(\mathcal{J}),$$

soit d'après le lemme 3.7,

$$\frac{3(p-1)}{4} \leq \nu(J_i) - \nu(\mathcal{J}).$$

D'autre part en appliquant le loi K à  $\mathcal{J}$

$$\nu(J_1) - \nu(\mathcal{J}) + \nu(J_2) - \nu(\mathcal{J}) = p + 1$$

et en utilisant l'inégalité :  $\nu(J_i) \leq \nu(J_j)$ , on trouve

$$\nu(J_i) - \nu(\mathcal{J}) \leq \frac{p+1}{2}.$$

On en déduit :  $3(p-1)/4 \leq (p+1)/2$  ce qui est impossible pour  $p > 5$  (on a  $p > 5$  car les hypothèses faites sur  $p$  impliquent  $p \equiv 1 \pmod{12}$ ).  $\square$

## 4 Points rationnels sur les courbes de Shimura

Le critère de [ParentYafaev] repose sur une description du groupe des caractères du quotient d'enroulement de la composante neutre de la fibre en  $p$  du modèle de Néron sur  $\mathbb{Z}_p$  de la jacobienne  $\text{Jac}(X^{pq})_{\mathbb{F}_p}^0$  de la courbe de Shimura  $X^{pq}$ . D'après un théorème de Raynaud (cf [SGA7-I, 12.4]), le groupe des caractères de  $\text{Jac}(X^{pq})_{\mathbb{F}_p}^0$  est isomorphe au groupe des cycles sur le graphe dual de la fibre en  $p$  de la courbe de Shimura  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$ . À l'aide d'une généralisation de la formule de Gross, Parent et Yafaev prouvent que le groupe des caractères du quotient d'enroulement de  $\text{Jac}(X^{pq})_{\mathbb{F}_p}^0$  est isomorphe au groupe des cycles sur  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  constitués de projections orthogonales pour l'accouplement de monodromie de vecteurs de Gross sur l'espace des diviseurs de degré 0 sur les arêtes du graphe  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$ .

Rappelons que  $\mathcal{L}$  et  $Y$  (introduits dans le paragraphe 2) désignent respectivement les  $\mathbb{Z}$ -modules des chemins et des cycles sur le graphe  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$ . On considère également les  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels  $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{L} \otimes \mathbb{Q}$  et  $Y_{\mathbb{Q}} = Y \otimes \mathbb{Q}$ .

On note  $I_{pq,e}$  l'idéal d'enroulement de  $\mathbb{T}_{\Gamma_0(pq)}$ , c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs de  $\mathbb{T}_{\Gamma_0(pq)}$  annihilant toutes les formes modulaires primitives  $f$  de poids 2 pour  $\Gamma_0(pq)$  telles que  $L(f, 1) \neq 0$ . On a la proposition suivante qui généralise la proposition 2.7.

**Proposition 4.1.** *On note par  $\mathbb{E}$  l'espace engendré par les projections orthogonales des vecteurs de Gross sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ . On a l'égalité :  $\mathbb{E} = \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}[I_{pq,e}]$ .*

Consulter [ParentYafaev, prop 4.2]. En combinant la proposition 4.1 avec le théorème de Raynaud décrivant le groupe des caractères de  $\text{Jac}(X^{pq})_{\mathbb{F}_p}^0$  comme groupe des cycles sur  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$ , on obtient la proposition suivante :

**Proposition 4.2.** *L'espace  $\mathbb{E} \cap Y_{\mathbb{Q}}$  est le groupe des caractères du quotient d'enroulement de  $\text{Jac}(X^{pq})_{\mathbb{F}_p}^0$ .*

Consulter [ParentYafaev, prop 4.3].

**Théorème 4.3.** *Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers tels que  $q > 245$ ,  $q \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $p \equiv 5 \pmod{12}$ ,  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ , et  $p \gg q$ . S'il existe  $C \in Y \cap \mathbb{E}$ , un chemin fermé sur le graphe  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  constitué de projections orthogonales de vecteurs de Gross sur  $\mathcal{L}^0$ , qui contient les deux arêtes exceptionnelles de longueur 2 avec une multiplicité première à  $p$ , alors la courbe quotient  $X^{pq}/w_q$  est sans point rationnel non spécial.*

*Démonstration.* Consulter [ParentYafaev, Theorem 5.3]. L'énoncé que nous donnons est légèrement différent : nous remplaçons l'hypothèse «  $C$  est un chemin fermé fait de vecteurs de Gross » par «  $C$  est un chemin fermé constitué de projection orthogonales de vecteurs de Gross ». En consultant la preuve de Parent et Yafaev, on voit que  $C$  correspond à un caractère du quotient d'enroulement de  $\text{Jac}(X^{pq})_{\mathbb{F}_p}^0$ , ce qui est équivalent, d'après la proposition 4.2, au fait que  $C$  est dans  $Y \cap \mathbb{E}$ .

On peut aussi noter que le vecteur d'Eisenstein appartient à l'espace engendré par les vecteurs de Gross, et donc que la projection orthogonale sur  $\mathcal{L}^0$  d'un chemin en vecteurs de Gross est également constitué de vecteurs de Gross.

□

Nous allons utiliser le travail du troisième paragraphe pour généraliser ce critère en supprimant la condition  $p \equiv -1 \pmod{3}$ . Ainsi les hypothèses de congruences sur  $p$  et  $q$  sont équivalentes aux conditions du cas non ramifié de Ogg ((2) théorème 2.1).

**Théorème 4.4.** *Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers tel que  $q > 245$ ,  $q \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ , et  $p \gg q$ . S'il existe  $C \in Y \cap \mathbb{E}$ , un chemin fermé sur le graphe  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  constitué de projections orthogonales de vecteurs de Gross sur  $\mathcal{L}^0$ , qui contient les deux arêtes exceptionnelles de longueur 2 avec une multiplicité première à  $p$ , alors la courbe quotient  $X^{pq}/w_q$  est sans point rationnel non spécial.*

*Démonstration.* Dans la preuve de [ParentYafaev, Theorem 5.3] l'hypothèse  $p \equiv -1 \pmod{3}$  n'est utilisée que dans la preuve du lemme [ParentYafaev, lemma 3.1.3]. Or nous avons généralisé ce lemme (cf. lemme 3.2) en supprimant cette condition. □

Pour la preuve du théorème 1.1, nous utiliserons la présente proposition décrivant l'image du vecteur d'Eisenstein-Shimura  $a_E$  par les applications  $s_*$  et  $t_*$ .

**Proposition 4.5.** *Si  $A_E$  et  $a_E$  désignent respectivement les vecteurs d'Eisenstein sur le graphe modulaire  $\mathcal{G}(X_0(q)_{\mathbb{F}_q})$  et le graphe de Shimura  $\mathcal{G}(X_{\mathbb{F}_p}^{pq})$  (cf. définitions 2.3 et 2.9), on a :  $s_*(a_E) = (p+1)A_E$ , et  $t_*(a_E) = (p+1)A_E$ .*

*Démonstration.* Par définition :

$$a_E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\text{card}(\text{End}(e_i)^*/\{\pm 1\})} e_i = \sum_{\substack{(E, C_p) \\ \text{à isom. près}}} \frac{1}{(\text{End}(E, C_p)^*/\{\pm 1\})} (E, C_p).$$

Où  $(E, C_p)$  parcourt l'ensemble des couples constitué d'une courbe elliptique supersingulière  $E$  en caractéristique  $q$  et d'un sous groupe d'ordre  $p$  de  $E$

$$s_*(a_E) = \sum_{k=1}^{g+1} \left( \sum_{\substack{(E_{j_k}, C_p) \\ \text{à isom. près}}} \frac{1}{\text{card}(\text{End}(E_{j_k}, C_p)^*/\{\pm 1\})} \right) E_{j_k}.$$

Pour  $k$  fixé, il y a  $p+1$  couples de la forme  $(E_{j_k}, C_p)$ . Par la formule des classes pour le groupe  $\text{End}(E_{j_k})^*/\{\pm 1\}$  opérant sur l'ensemble des  $(E_{j_k}, C_p)$ , on a :

$$\sum_{\substack{(E_{j_k}, C_p) \\ \text{à isom. près}}} \frac{1}{\text{card}(\text{End}(E_{j_k}, C_p)^*/\{\pm 1\})} = \frac{p+1}{\text{card}(\text{End}(E_{j_k})^*/\{\pm 1\})}.$$

Donc  $s_*(a_E) = (p+1)A_E$ . On montre de même que  $t_*(a_E) = (p+1)A_E$ .

□

Prouvons maintenant notre résultat principal : le théorème 1.1 dont l'énoncé est rap-pelé ci-dessous.

**Théorème 4.6.** *Soit  $q > 245$  un nombre premier avec  $q \equiv 3 \pmod{4}$ . Il existe une borne  $B_q$  dépendant de  $q$  telle que si  $p$  est un nombre premier vérifiant  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$  et  $p \geq B_q$ , alors la courbe  $X^{pq}/w_q$  est sans point rationnel non spécial.*

*Démonstration.* Soit  $l \neq p, q$  un nombre premier. D'après la proposition 2.8, le vecteur d'Eisenstein modulaire  $A_E$  sur  $\mathcal{G}((X_0(q))_{\mathbb{F}_q})$  appartient au  $\mathbb{Q}$ -espace engendré par les vecteurs de Gross de la forme  $\Gamma_D$ , pour  $D = -4l^{2n}$ , où  $n \geq 1$ . Ces vecteurs  $\Gamma_D$  corres-pondent à des sous-ordres stricts  $O_D$  de l'ordre  $O_{-4}$  de conducteurs  $l^n$ . On peut donc écrire  $A_E$  comme combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\lambda_0 A_E = \sum_{n=1}^N \lambda_n \Gamma_{-4l^{2n}},$$

avec  $\lambda_n \in \mathbb{Z}$  et  $\lambda_0 \neq 0$ . Pour ne pas avoir de dénominateurs on choisit tous les  $\lambda_n$  multiples de 12. D'après la proposition 2.16, il existe  $B$  une borne telle que, pour  $p \geq B$ , chacun des vecteurs  $\gamma_{-4l^{2n}}$  soit sans arête commune avec les vecteurs  $\gamma_{-4}$  et  $\gamma_{-3}$ . On suppose dans la suite  $p \geq B$ , de telle sorte que les vecteurs  $\Gamma_{-4l^{2n}}$  ne contiennent pas d'arête exceptionnelle de longueur 2 ou 3. On impose en outre que  $p$  ne divise pas  $\lambda_0$ . On suppose également que  $p \gg q$  de telle sorte qu'on puisse appliquer le théorème 4.4.

Considérons le chemin en vecteurs de Gross  $C = \sum_{n=1}^N \lambda_n \gamma_{-4l^{2n}}$  sur le graphe dual de la fibre en  $p$  de la courbe de Shimura  $X^{pq}$ . D'après l'hypothèse,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $p$  est scindé dans  $O_{-4}$  et dans tous ses sous-ordres stricts  $O_{-4l^{2n}}$ . En outre chacun de ces vecteurs ne contient que des arêtes de longueur 1. On peut appliquer le corollaire 2.14 :

$$s_*(C) = \sum_{n=1}^N \lambda_n s_*(\gamma_{-4l^{2n}}) = \sum_{n=1}^N \lambda_n 4\Gamma_{-4l^{2n}} = 4\lambda_0 A_E.$$

De même  $t_*(C) = 4\lambda_0(A_E)$ . D'autre part d'après la proposition 4.5, on a :  $s_*(a_E) = t_*(a_E) = (p+1)A_E$ . Le chemin  $C_0 = (p+1)C - 4\lambda_0 a_E$ , est un chemin fermé. Pour cela il suffit de voir que  $s_*(C_0) = t_*(C_0) = 0$ .

D'autre part, le chemin  $C_0$  est la projection orthogonale pour l'accouplement de mo-nodromie du chemin en vecteurs de Gross  $(p+1)C$  sur l'espace  $\mathcal{L}^0$  des diviseurs de degré 0. Donc  $C_0$  appartient à  $\mathbb{E}$ . Finalement  $C_0$  est un chemin de  $\mathbb{E} \cap Y$ . D'après les hy-pothèses faites sur  $p$ , les vecteurs du chemin  $C$  ne contiennent pas d'arête exceptionnelle de longueur 2. D'autre part le vecteur d'Eisenstein  $a_E$  contient chacune des deux arêtes exceptionnelle de longueur 2 avec multiplicité 1/2. Le chemin  $C_0$  passe par chacune de ces arêtes exceptionnelles avec multiplicité  $2\lambda_0$ . Donc on peut appliquer le théorème de Parent-Yafaev à ce chemin. On en déduit que la courbe de Shimura  $X^{pq}/w_q$  est sans point rationnel non spécial. □

# Références

- [BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron Models* Springer, *Ergeb. Math. Grenz.* **21** (1990).
- [BFGR] N. Bruin, E.V. Flynn, J. González, V. Rotger, *On finiteness conjecture for modular quaternion algebras*. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **141**(3), 383-408 (2006).
- [Clarkthesis] P. Clark, *Local and global points on moduli spaces of potentially quaternionic abelian surfaces*. Ph.D. Thesis, Harvard University, (2003). Available at <http://math.uga.edu/~pete/thesis.pdf>
- [DR] P. Deligne, M. Rapoport, *Les schémas de modules de courbes elliptiques*. *Proc. Int. Summer School on modular functions*. Antwerp 1972, vol II, Springer, *LMNO* **349** (1973).
- [Edixhoven] B. Edixhoven *On Néron models, divisors and modular curves*. *J. Ramanujan Math. Soc.* **13**(2), pp. 157-194 (1998).
- [Gross] B. Gross, *Heights and the special values of  $L$ -series*. *Canadian Math. Soc. Conference Proceedings* 7, Am. Math. Soc., Providence, pp. 115-187 (1987).
- [LR] W. Luo, D. Ramakrishnan, *Determination of modular forms by twists of critical  $L$ -values*. *Invent. Math.* **130** pp. 371-398 (1997).
- [Molina] S. Molina, *Specialisation of Heegner points and applications*. Ph.D. Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, (2010).
- [ParentYafaev] P. Parent, A. Yafaev, *Proving the triviality of rational points on Atkin-Lehner quotients of Shimura curves*. *Math. Ann.* **339** pp. 915-935 (2007).
- [Parent] P. Parent, *Towards the triviality of  $X_0^+(p^r)(\mathbb{Q})$  for  $r > 1$* . *Compositio Math.* **141**(3), pp. 561-572 (2005).
- [Ribet] K. Ribet, *On modular representations of  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  arising from modular forms*. *Invent. Math.* **100**, pp. 431-476 (1990).
- [Rotger] V. Rotger, *Which quaternion algebra act on a modular abelian variety?* *Mathematical Research Letters* **15**, pp. 251-263. (2008)
- [RSY] V. Rotger, A. Skorobogatov, A. Yafaev, *Failure of the Hasse principle for Atkin-Lehner quotients of Shimura curves over  $\mathbb{Q}$* . *Moscow Math. J.* **5**(2), pp 463-476 (2005).
- [SGA7-I] A. Grothendieck, M. Raynaud, D. Rim, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA7-I)*. Springer, *Lecture Notes in Math.* **288**, (1972).
- [Shimura] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions* Kanô Memorial Lectures, No. 1. Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten Publishers, Tokyo, Princeton University Press, Princeton, NJ, pp. xiv+267 (1971).
- [Silv1] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer-Verlag, *GTM* **106**, (1992).

- [Silv2] J. H. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer-Verlag, GTM **151**, (1994).
- [Vigneras] M.-F. Vignéras, *Arithmétique des Algèbres de Quaternions*. Lecture Note in Math **800**, (1980).